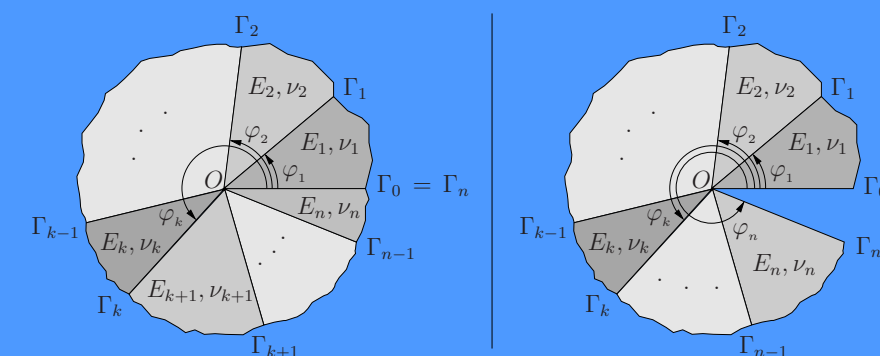


In der vorliegenden Arbeit werden die Nahfelder an ebenen Multi-Materialverbindungsstellen betrachtet, die aus Fügungen homogener, isotroper Sektoren bestehen und ausschließlich in ihrer Ebene belastet sind. Die asymptotischen Nahfeldanalysen erfolgen mit der Methode komplexer Potentiale mittels einer geeigneten Kombination von Potenzfunktionen. Bei den Analysen steht insbesondere die Ermittlung der Singularitätsexponenten im Vordergrund. Die Arbeit leistet einige neue theoretische Beiträge. Besonders hervorzuheben ist dabei eine Methode, mit der es möglich ist, in vielen Fällen geschlossen-analytische Lösungen zu ermitteln. Die Ergebnisse weisen generell einen analytischen Charakter auf und darüber hinaus konnten sämtliche Berechnungen mit außerordentlich hoher Effizienz durchgeführt werden. Eine Besonderheit bei den Untersuchungen stellt die Tatsache dar, dass bei zahlreichen einfachen Konfigurationen "Supersingularitäten", also Singularitäten, die stärker als die klassische $\frac{1}{\sqrt{r}}$ - Rissspitzen-Singularität sind, gefunden werden.



Asymptotische Nahfeldanalysen ebener Multi-Materialverbindungsstellen mit der Methode komplexer Potentiale

Christian Sator



$$\Phi_k(z) = a_{1k} z^\lambda + a_{2k} z^{\bar{\lambda}} \quad , \quad \Psi_k(z) = b_{1k} z^\lambda + b_{2k} z^{\bar{\lambda}}$$

$$\rightsquigarrow \sigma_{ij}(r, \varphi) = \sum_{k=1} K_k r^{\operatorname{Re}(\lambda_k)-1} \left[\cos(\operatorname{Im}(\lambda_k) \ln r) f_{ij_k}^{(\cos)}(\varphi) + \sin(\operatorname{Im}(\lambda_k) \ln r) f_{ij_k}^{(\sin)}(\varphi) \right]$$

Asymptotische Nahfeldanalysen ebener Multi-Materialverbindungsstellen mit der Methode komplexer Potentiale

Vom Fachbereich Maschinenbau
an der Technischen Universität Darmstadt
zur
Erlangung des Grades eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte

D i s s e r t a t i o n

vorgelegt von

Dipl.-Ing. Christian Sator

aus Aschaffenburg

Berichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. W. Becker
Mitberichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. D. Gross
Tag der Einreichung:	04.05.2010
Tag der mündlichen Prüfung:	22.06.2010

Herausgeber:

Studienbereich Mechanik
Technische Universität Darmstadt
Hochschulstr. 1
D-64289 Darmstadt
Germany

© Christian Walter Michael Sator
Am Dreispitz 37
D-63741 Aschaffenburg
Germany

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten. Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, dieses Werk ganz oder teilweise auf photo-mechanischem, elektronischem oder sonstigem Wege zu vervielfältigen.

Forschungsbericht Mechanik - Band 21, Darmstadt 2010
ISBN 978-3-935868-21-1

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Strukturmechanik der Technischen Universität Darmstadt.

Ich bedanke mich bei allen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, insbesondere bei Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Becker für seine wohlwollende Unterstützung und Förderung, seine stete Diskussionsbereitschaft sowie die mir gewährten Freiheiten bei der wissenschaftlichen Arbeit. Herrn Prof. Dr.-Ing. D. Gross danke ich für das Interesse an meiner Arbeit und die bereitwillige Übernahme des Korreferates.

Bei den Kollegen möchte ich mich für die Unterstützung bei der Bewältigung verschiedenster Aufgaben sowie für das angenehme Klima inner- und außerhalb der Kernzeit bedanken. Besonders sei meinem Bürokollegen Herrn Dr.-Ing. J. Artel für die gemeinsame Zeit an der TUD voller wissenschaftlicher Diskussionen und äußerst unterhaltsamer Momente gedankt.

Zu guter Letzt danke ich meiner Familie für ihre Geduld und Unterstützung.

Aschaffenburg, im Juli 2010

Christian Sator

Meinem Vater

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	III
Kurzfassung	VII
1 Einführung	1
1.1 Motivation und Problemstellung	1
1.2 Stand der Forschung	3
1.3 Ziele und Aufbau der Arbeit	6
2 Theoretische Grundlagen	9
2.1 Mechanisches Verhalten von Festkörpern	9
2.2 Lineare Elastizitätstheorie	10
2.2.1 Spannungszustand	10
2.2.2 Gleichgewichtsbedingungen	14
2.2.3 Verzerrungen	14
2.2.4 Elastizitätsgesetz	17
2.2.5 Grundgleichungen - Randbedingungen	17
2.2.6 Formänderungsenergiedichte	18
2.2.7 Ebene Probleme	19
2.3 Komplexe Methode	22
2.4 Griffith-Riss	24
3 Asymptotische Nahfeldanalysen mit der komplexen Methode	29
3.1 Übergangs- und Randbedingungen	29
3.2 Potentiale mit komplexem Exponent	32
3.3 Potentiale mit reellem Exponent	35

3.4	Gestalt der Spannungen und Verschiebungen	38
3.5	Logarithmische Singularitäten	45
3.6	Dundurs-Parameter	54
3.7	Zusammenfassung und Diskussion	55
4	Analyse verschiedener Konfigurationen	59
4.1	Bimaterialkerb mit Knick	59
4.1.1	Bimaterialkerb mit Knick und festem Verhältnis der Steifigkeiten .	61
4.1.2	Bimaterialkerb mit Knick und festem Winkel	64
4.1.3	Punktweise geschlossen-analytische Lösungen	67
4.2	Eine spezielle Bimaterialkonfiguration	68
4.2.1	Eigenwertverteilung als Funktion des Winkels	69
4.2.2	Geschlossen-analytische Lösungen	72
4.2.3	Einfluss der Querkontraktionszahlen	74
4.3	Verstärkungspflasterstellen	77
4.4	Kanalbildung	83
5	Zusammenfassende Diskussion und Ausblick	87
	Literatur	90

Nomenklatur

Abkürzungen

ESZ	Ebener Spannungszustand
EVZ	Ebener Verzerrungszustand
FEM	Finite-Elemente-Methode

Notation

$(\cdot)_{,j}$	Erste partielle Ableitung nach x_j
$(\cdot)_{,ij}$	Gemischte zweite partielle Ableitung nach x_i und x_j
$(\cdot)^T$	Transponierte Matrix bzw. transponierter Tensor
$\overline{(\cdot)}$	Konjugiert komplexe Zahl
$(\cdot)'$	Erste Ableitung bezüglich des komplexen Arguments z
$(\cdot)''$	Zweite Ableitung bezüglich des komplexen Arguments z
$(\cdot)^I$	Modus I zugeordnete Größe
$(\cdot)^{II}$	Modus II zugeordnete Größe
$(\cdot)^{III}$	Modus III zugeordnete Größe
$\text{Re}(\cdot)$	Realteil
$(\cdot)^{\text{Re}}$	Realteil
$\text{Im}(\cdot)$	Imaginärteil
$(\cdot)^{\text{Im}}$	Imaginärteil

Lateinische Buchstaben

a	Risslänge
$\tilde{\mathbf{a}}, \mathbf{a}$	Spaltenvektoren
a_k, b_k, c_k	Komplexwertige Unbekannte
\tilde{a}_k, \tilde{b}_k	Komplexwertige Unbekannte
a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}	Komplexwertige Unbekannte

A	Oberfläche eines Körpers
a_i	Beschleunigung in x_i - Richtung
ΔA	Flächenelement
dA_i	Infinitesimales Flächenelement
\mathbf{B}, \mathbf{B}^*	Matrizen
\mathbf{C}	Elastizitätstensors vierter Stufe in symbolischer Schreibweise
C_{ijkl}	Elastizitätstensors in Indexschreibweise bzw. dessen Komponente $ijkl$
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	Einheitsvektoren eines kartesischen Koordinatensystems
$\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_k$	Einheitsvektoren eines gedrehten kartesischen Koordinatensystems
E, E_i	Elastizitätsmodul bzw. Elastizitätsmodul im i -ten Sektor
E'	Ersatz-Elastizitätsmodul
E_{ij}	Green-Lagrangescher Verzerrungstensor bzw. dessen Komponente ij
\mathbf{F}	Schnittkraftvektor
F	Airysche Spannungsfunktion
F_x, F_y	Komponenten der resultierenden Kraft auf Randbogenstück
\mathbf{f}	Vektor der Volumenkräfte
G	Schubmodul
\mathbf{G}	Matrix
\mathbf{I}	Einheitstensor zweiter Stufe
$I_\sigma, II_\sigma, III_\sigma$	Invarianten des Spannungstensors
K_I, K_{II}	K-Faktoren
L	Charakteristische Länge
M	Resultierendes Moment einer Kräftegruppe
n	Anzahl von Sektoren
\mathbf{n}, \mathbf{n}_j	Normalenvektoren
P, Q	Materielle Punkte bzw. Partikel in Referenzkonfiguration
P', Q'	Materielle Punkte bzw. Partikel in Momentankonfiguration
r	Radialkoordinate bei Polarkoordinaten
\tilde{r}	Entdimensionierte Radialkoordinate bei Polarkoordinaten
\mathbf{t}	Spannungsvektor oder auch Vektor der Oberflächenkräfte
\mathbf{t}_j	j -ter Spannungsvektor
t_i^*	Vorgeschriebene äußere Belastung
t_1, t_2, t_3	Komponenten des Spannungsvektors
T	Temperatur
\mathbf{u}	Verschiebungsvektor
u, v	Verschiebungskomponenten
U	Formänderungsenergiedichte

\tilde{U}	Spezifische Komplementärenergie
V	(Teil) Volumen eines Körpers
W	Spezifische Formänderungsarbeit
x, y	Kartesische Koordinaten
\mathbf{x}	Ortsvektor in der Momentankonfiguration
\mathbf{X}	Ortsvektor in der Referenzkonfiguration
x_1, x_2, x_3	Globales kartesisches Koordinatensystem
x_1, x_2, x_3	Ortskoordinaten in Momentankonfiguration
x'_1, x'_2, x'_3	Koordinaten eines gedrehten kartesischen Koordinatensystems
X_i	Materielle Koordinaten der Referenzkonfiguration
z	Komplexe Variable
z_k	Punkt des Randes oder Interfaces k

Griechische Buchstaben

α	Winkel
α_{ik}, α_{jl}	Transformationskoeffizienten bei Drehung des Koordinatensystems
Γ	Verhältnis zweier Schubmoduln
Γ_i	Rand i bzw. Interface i
ε	Infinitesimaler Verzerrungstensor
ε_{ij}	Infinitesimaler Verzerrungstensor bzw. dessen Komponente ij
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$	Komponenten des Verzerrungstensors im ebenen Fall bzgl. x, y -System
$\delta^D, \delta^{D'}$	Dundurs-Parameter
δ_{ij}	Kroneckersymbol
$\eta^D, \eta^{D'}$	Dundurs-Parameter
η	Modulares Verhältnis
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Technische Gleitungen
κ, κ_i	Materialkonstante bzw. Materialkonstante im i -ten Sektor
λ, λ_i	Singularitätsexponent
μ, λ	Lamésche Konstanten
ν, ν_i	Querkontraktionszahl bzw. Querkontraktionszahl im i -ten Sektor
ν'	Ersatz-Querkontraktionszahl
ρ	Massedichte
σ	Normalspannungskomponente des Spannungsvektors
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Hauptspannungen
$\boldsymbol{\sigma}$	Cauchyscher Spannungstensor
σ_{ij}	Cauchyscher Spannungstensor bzw. dessen Komponente ij

σ'_{ij}	Komponente ij des Cauchyschen Spannungstensors bzgl. eines gedrehten Koordinatensystems
$\sigma_r, \sigma_\varphi, \tau_{r\varphi}$	Spannungskomponenten bzgl. Polarkoordinaten
$\sigma_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz},$ $\tau_{yx}, \sigma_{yy}, \tau_{yz},$ $\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_{zz}$	Alternative Darstellung der Komponenten des Cauchyschen Spannungstensors bzgl. kartesischer Basis
τ	Schubspannungskomponente des Spannungsvektors
φ	Umfangskoordinate bei Polarkoordinaten
Θ	Komplexes Potential
$\Phi, \Psi, \Phi_k, \Psi_k$	Komplexe Potentiale, bzw. komplexe Potentiale im k -ten Sektor

Kurzfassung

Bei Multi-Materialverbindungsstellen, die sich bei vielen technischen Anwendungen finden lassen, werden verschiedene Konstituenten durch stoffschlüssige Verbindungen zu einer Gesamtstruktur gefügt, um einige Vorteile der Verbindungspartner miteinander zu vereinen. Eine Analyse im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie zeigt, dass solche Stellen kritisch sind, da wegen der dort gegebenen Diskontinuitäten singuläre Spannungsfelder vorliegen können. Obwohl reale Situationen harmloser sind - kein Material kann unendlich hohe Spannungen ertragen - ist die Analyse singulärer Spannungen dennoch von fundamentaler Bedeutung. An den genannten kritischen Stellen sind vor allem die Felder in der unmittelbaren Umgebung maßgebend. Daher ist es nicht erforderlich ein vollständiges Randwertproblem mit beträchtlichem numerischen Aufwand zu berechnen. Stattdessen hat es sich als höchst effizient erwiesen, Spannungs- und Verschiebungsverteilungen durch asymptotische Nahfeldanalysen zu ermitteln.

In der vorliegenden Arbeit werden die Nahfelder an ebenen Multi-Materialverbindungsstellen betrachtet, die aus Fügungen isotroper Sektoren bestehen und ausschließlich in ihrer Ebene belastet sind. Die asymptotischen Nahfeldanalysen erfolgen mit der Methode komplexer Potentiale mit einer geeigneten Kombination von Potenzfunktionen. Bei den Analysen steht insbesondere die Ermittlung der Singularitätsexponenten im Vordergrund.

Die Arbeit leistet einige neue theoretische Beiträge: So wird ein Nachweis für eine große Klasse von Multi-Materialkonfigurationen erbracht, nach dem Potenzfunktionen, die sich durch reellwertige und komplexwertige Exponenten unterscheiden, letztlich die gleichen Singularitätsordnungen nach sich ziehen. Auch logarithmische Singularitäten werden im Rahmen der komplexen Methode behandelt. Hier wird einerseits demonstriert, dass logarithmische Singularitäten von eher akademischer Natur sind, andererseits wird nachgewiesen, dass hier der Satz von Übergangs- und Randbedingungen für eine große Klasse von Multi-Materialkonfigurationen auf eine typische Gestalt des linearen Gleichungssystems führt.

Besonders hervorzuheben ist eine Methode, die im Rahmen dieser Arbeit entwickelt und bei der Analyse einer speziellen Bimaterialkonfiguration vorgestellt wird. Hiermit ist es in vielen Fällen möglich geschlossen-analytische Lösungen zu ermitteln. Generell weisen die Ergebnisse einen analytischen Charakter auf, da die charakteristische Gleichung stets in geschlossener Form vorliegt und die Nullstellensuche im Prinzip mit beliebiger Präzision numerisch durchgeführt werden kann. Darüber hinaus konnten sämtliche Berechnungen mit außerordentlich hoher Effizienz durchgeführt werden.

Eine Besonderheit bei den Untersuchungen stellt die Tatsache dar, dass bei zahlreichen einfachen Konfigurationen "Supersingularitäten", also Singularitäten, die stärker als die klassische $\frac{1}{\sqrt{r}}$ - Rissspitzen-Singularität sind, gefunden werden.

Kapitel 1

Einführung

1.1 Motivation und Problemstellung

Bei Problemstellungen der linearen Elastizitätstheorie liegen in vielen Situationen mathematische Singularitäten vor. Diese sind ein Resultat der strengen elastizitätstheoretischen Idealisierungen und treten z.B. bei Belastungen durch konzentrierte Einzelkräfte oder auch bei Vorliegen von materiellen oder geometrischen Diskontinuitäten auf. In realen Situationen sind die Gegebenheiten natürlich harmloser, da kein Material unendlich hohe Spannungen ertragen kann. An solchen Stellen kommt es durch inelastische Deformationen (z.B. plastisches Fließen) zu nichtsingulären Spannungskonzentrationen. Singuläre Spannungen stellen keine direkte Verletzung der linearen Elastizitätstheorie dar, stehen aber streng genommen im Widerspruch zur grundlegenden Annahme kleiner Verschiebungsgradienten respektive Verzerrungen. Dennoch ist die genaue Kenntnis der singulären Felder von grundlegendem Interesse. Diesbezüglich seien Dempsey und Sinclair [23] zitiert: "As a consequence stress singularities are a real fact of theory and must be taken into account in any elastic analysis". Singuläre Spannungen spielen beispielsweise bei der Betrachtung von Rissausbreitungsvorgängen in spröden Körpern eine zentrale Rolle, denn die mechanische Bewertung der Gegebenheiten an der Rissspitze erfolgt dort typischerweise im Rahmen der linearen Bruchmechanik und basiert auf den vorliegenden Spannungsfeldern.

Multi-Materialverbindungsstellen in technischen Strukturen stellen kritische Bereiche dar, da wegen der dort gegebenen Diskontinuitäten singuläre Spannungsfelder vorliegen können. Solche Multi-Materialverbindungsstellen lassen sich bei vielen Anwendungen finden, besonders im Hinblick auf moderne Leichtbaustrukturen, bei denen aufgrund ständig wachsender technischer und wirtschaftlicher Anforderungen Mehrschichtverbunde zum Einsatz kommen. Durch sogenannte stoffschlüssige Verbindungen werden verschiedene Konstituenten einer Gesamtstruktur durch atomare oder molekulare Kräfte zusammengehalten, um einige Vorteile der Verbindungspartner miteinander zu vereinen. Beispiele für stoffschlüssige Fügungstechniken sind Löten, Schweißen, Vulkanisieren und Kleben. Fügungen bzw. Verbindungen zwischen verschiedenen Materialien oder Gegenständen sind jedoch nicht erst in der heutigen Zeit von hohem Interesse. Es handelt sich vielmehr um eine der ältesten Methoden der Menschheit, um leistungsfähigere Strukturen zu konstruieren. Man denke etwa an spitze bzw. scharfkantige Steine, die mit Hilfe von Pech, Harz, Bitumen oder anderen Materialien schon in der Steinzeit mit Holzschäften gefügt

wurden, um Speere oder Pfeile zu erhalten, die die Vorteile scharfer Spitzen mit leichten Holzschäften kombinieren.

Von einer Vielzahl heutiger Anwendungen seien exemplarisch die folgenden Fügungen genannt: Beschichtete Substrate, Lötverbindungen von Mikrochips, Klebverbindungen zwischen Leichtbauteilen im Flugzeug- oder Schiffsbau sowie in der Kfz-Industrie.

Vermutlich ebenso alt wie die verschiedenen Fügetechniken ist die Frage nach der Haltbarkeit von Fügungen. Es ist eine wohlbekannte Tatsache, dass bevorzugt an Fügstellen Risse entstehen. Zu denken ist in diesem Zusammenhang auch an den Randeffect bei Mehrschichtverbunden (Laminaten). Es lässt sich zeigen, dass die dort vorliegenden interlaminaren Spannungen singulären Charakter besitzen und zu Randdelaminationen, also einem Ablösen einzelner Schichten, führen können. Solche kritischen Stellen vermögen nicht nur die Festigkeit einer Gesamtstruktur deutlich herabzusetzen, sondern können im schlimmsten Fall sogar dazu führen, dass die Gesamtstruktur unbrauchbar bzw. zerstört wird. Bei mikroelektronischen Bauteilen etwa, stellt das Versagen von Fügstellen die Hauptausfallursache dar. Fügeverbindungen sollten daher bereits in frühen Phasen der Konstruktion bzw. des Entwurfs analysiert und bewertet werden, um beispielsweise

- die zuverlässige Funktion einer Struktur gewährleisten zu können,
- brauchbare Material- und Inspektionsvorschriften für verschiedene Fälle erstellen zu können,
- die Lebensdauer von Bauteilen bei bestimmten Belastungen abschätzen zu können.

Für eine umfassende Beurteilung solcher Situationen, insbesondere im Hinblick auf bruchmechanische Fragestellungen, ist im Allgemeinen eine alleinige Analyse der Nahfelder (Spannungen, Verschiebungen) bzw. der Singularitätsordnungen nicht ausreichend. Brucherscheinungen sind jedoch stets mit dem Vorhandensein von Spannungskonzentrationen verknüpft. Daher liefern die Spannungs- und Verschiebungsverteilungen der linearen Elastizitätstheorie wichtige, grundlegende Informationen und damit einen zentralen Beitrag für die Beurteilung des Bruchverhaltens, insbesondere bei spröden Materialien. Ihr Kenntnis ist nicht nur von theoretischem, sondern auch von hohem praktischen Interesse. Spannungskonzentrationen werden sich bei Multi-Materialverbindungsstellen nur selten gänzlich vermeiden lassen, aber durch ein tieferes Verständnis der auftretenden Spannungsfelder lässt sich in vielen Fällen wenigstens eine Reduktion bzw. eine Milderung erzielen.

Probleme der Festkörpermechanik sind häufig von ebener Natur, oder können näherungsweise als solche aufgefasst werden. Dann reduziert sich die Zahl der Unbekannten sowie der Gleichungen und diese Fälle lassen sich einfacher behandeln. Trotz dieser Einschränkung führt der Versuch bei komplizierteren Geometrien Spannungs- und Verschiebungsfelder vollständig zu berechnen auf große mathematische Schwierigkeiten. Dann kann lediglich eine näherungsweise Lösung ermittelt werden. Als ein Ausweg bieten sich moderne numerische Verfahren, wie die Finite-Elemente-Methode (FEM), die Randelemente-Methode oder auch die Rand-Finite-Elemente-Methode an. Mit ihnen können die Felder grundsätzlich sehr genau berechnet werden, wobei aber zu beachten ist, dass hinreichend präzise Analysen gerade bei komplizierten Geometrien einen äußerst hohen Aufwand nach sich ziehen. Darüber hinaus ist die FEM, die das Standardwerkzeug der Ingenieurwissenschaften darstellt, für die Bestimmung von Singularitätsexponenten eher ungeeignet.

Für die Belange der Mechanik, bzw. der Bruchmechanik ist es jedoch meist überhaupt nicht erforderlich, die entsprechenden Randwertprobleme vollständig zu lösen, da vor allem die Felder in der unmittelbaren Umgebung von kritischen Stellen (Risse, Multi-Materialverbindungsstellen) maßgebend sind. Deswegen und weil sich asymptotische Lösungen bedeutend einfacher gewinnen lassen, hat es sich als höchst effizient erwiesen, die Spannungs- und Verschiebungsverteilungen durch asymptotische Nahfeldanalysen zu ermitteln.

1.2 Stand der Forschung

In diesem Abschnitt wird ein Überblick über die Fülle an Publikationen gegeben, die für das Verständnis und die Einordnung dieser Arbeit relevant sind, ohne dabei Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben. Gemäß der Zielsetzungen der vorliegenden Arbeit (siehe Abschnitt 1.3) erfolgt eine Einschränkung auf ebene Multi-Materialverbindungsstellen, die aus Fügungen isotroper Sektoren bestehen und ausschließlich Belastungen in ihrer Ebene (inplane-Belastungen) unterliegen. Verschiedene Überblickartikel, die sich in dieses Themengebiet einordnen, stammen von Meleshko [60], Sinclair [77, 78] sowie von Paggi und Carpinteri [68], wobei besonders letzterer aus dem Jahre 2008 hervorgehoben sei.

Im Laufe der Zeit wurden drei verschiedene mathematische Vorgehensweisen bzw. Techniken zur Analyse der singulären Felder vorgeschlagen und eingesetzt:

- Die sogenannte *Eigenfunktion-Expansionsmethode*
- Ein Zugang über die *Methode der komplexen Potentiale*
- Ein Zugang über eine komplexe Lösungsformulierung mit einer verallgemeinerten *Mellin-Transformation*

Bei jeder der genannten Techniken läuft die asymptotische Nahfeldanalyse von Multi-Materialkonfigurationen ähnlich ab: Ausgehend von einem geeigneten Koordinatensystem wird zunächst aus dem bestehenden Satz an Übergangs- und Randbedingungen ein lineares Gleichungssystem gewonnen. Die Forderung nach nichttrivialen Lösungen dieses Systems führt anschließend zu den Nullstellen λ des charakteristischen Polynoms, die üblicherweise als Eigenwerte bezeichnet werden. Diese Nullstellen hängen schließlich mit dem singulären Spannungsverhalten in der Form $\sigma \sim r^{\lambda-1}$ zusammen.

Eigenfunktion-Expansionsmethode

Unabhängig voneinander schlugen 1907 Wieghardt [85] sowie später in 1952 Williams [87] vor, mit der sogenannten *Eigenfunktion-Expansionsmethode* Spannungssingularitäten an gekerbten Strukturen zu untersuchen. Bei der Arbeit von Wieghardt [85] handelt es sich vermutlich um die erste auf diesem Gebiet. Weitere frühe Publikationen stammen von Knein [52] und Brahtz [9].

Bei dieser Vorgehensweise wird mit Airyschen Spannungsfunktionen gearbeitet, wobei im i -ten Sektor der Multi-Materialkonfiguration ein separabler Ansatz der Form

$$\Phi_i(r, \varphi) = \sum_j r^{\lambda_j+1} f_{i,j}(\varphi, \lambda_j)$$

mit geeigneten Spannungsfunktionen $f_{i,j}$ verwendet wird. Man erhält auf diese Weise ein Abklingverhalten der Spannungen von der Art $\sigma_r^i \sim r^{\lambda-1}$, $\sigma_\varphi^i \sim r^{\lambda-1}$, $\tau_{r\varphi}^i \sim r^{\lambda-1}$, das durch die Eigenwerte λ charakterisiert ist.

Basierend auf diesem Ansatz existiert eine große Zahl an Veröffentlichungen, die die Abhängigkeit der singulären Felder von der gegebenen Geometrie und den eingesetzten Materialien auf numerischem Weg behandelt, wie zum Beispiel die Publikationen von Zak und Williams [93], Williams [87], Rice und Sih [74], Fenner [37], Dempsey und Sinclair [23, 24], Dempsey [25], Pageau et. al. [67], Munz und Yang [63], Munz et. al. [64] sowie von Carpinteri und Paggi [16, 18]. Von den genannten Veröffentlichungen beschäftigen sich die Arbeiten von Dempsey [25] sowie von Dempsey und Sinclair [23, 24] mit den sogenannten logarithmischen Singularitäten, die später noch genauer diskutiert werden.

Numerische Aspekte im Zusammenhang mit der Nullstellensuche des charakteristischen Polynoms werden in den folgenden Publikationen behandelt: Chen [19], Barrose et. al. [1], Fenner [37], Carpenter und Byers [14], Müller [61], Papadakis und Babushka [69] sowie Leguillon und Sanchez-Palencia [56].

Methode der komplexen Potentiale

Die wohl umfassendsten Entwicklungen und Beschreibungen zur Anwendung der Methode der komplexen Potentiale auf ebene Probleme der Elastizitätstheorie stammen von Muschelischwili [65]. Für eine knappe Darstellung dieser Methode sei auf Abschnitt 2.3 der vorliegenden Arbeit verwiesen.

Eine frühe Veröffentlichung, die sich mit einer Anwendungen dieser Methode auf die hier betrachteten singulären Spannungsfelder befasst, stammt von Huth [45]. Williams [88] behandelte mit dieser Methode einige Kerbprobleme und bestätigte dabei Ergebnisse aus seiner früheren Arbeit [87], in der er die Ergebnisse mit der Eigenfunktion-Expansionsmethode erzielte.

Weitere nennenswerte Arbeiten, die sich mit Kerbproblemen und Bimaterialkonfigurationen beschäftigen, stammen von Carpenter [12, 13], Carpenter und Byers [14], Reedy [71, 72], Quian [70] sowie von Chen und Nisitani [20].

Auch Rissprobleme wurden behandelt, etwa von England [29], Erdogan [31] sowie von Wang [84], der einige Ergebnisse von Zak und Williams [93] bestätigte.

In einem Diskussionsbeitrag zu der Arbeit von Bogy [3] schlug Dundurs [27] 1969 vor, die Materialabhängigkeiten vereinfacht durch zwei elastische Parameter zu beschreiben. Diese sogenannten Dundurs-Parameter (siehe auch Abschnitt 3.6) basieren auf Dundurs Arbeit [26] von 1967 und wurden daraufhin auch von Bogy [4, 6], Bogy und Wang [5] sowie von weiteren Autoren verwendet.

England [30] - von dem auch ein Lehrbuch [28] über die komplexe Methode in der Elastizitätstheorie stammt - untersuchte und diskutierte den Einfluss der Geometrie und der

Randbedingungen an ebenen homogenen Kerbproblemen auf die singulären Felder. Dabei nahm er für die eingesetzten Potenzfunktionen implizit reellwertige Exponenten an. Theocaris [82] knüpfte an die Betrachtungen von England [30] und Dundurs [26] an und schlug in seiner Publikation eine Erweiterung der Potenzfunktionen vor, bei der explizit komplexwertige Exponenten zugelassen werden. Darüber hinaus kritisierte er eine Reihe von Arbeiten, die auf verschiedenen Ansätzen basieren, bei denen der Wert λ , der das Abklingverhalten der Spannungen $\sigma \sim r^{\lambda-1}$ beschreibt, a priori reellwertig ist, aber a posteriori auch komplexe Werte annehmen darf. Dies führt zu Spannungen und Verschiebungen, die einen Imaginärteil besitzen, was physikalisch nicht sinnvoll ist.

Auf der Vorgehensweise in der Publikation von Theocaris [82] basieren schließlich die Arbeiten von Gdoutos und Theocaris [38], Yang und Munz [92], Suga et. al. [80, 81], Carpinteri et. al. [17] sowie von Pageau et. al. [66]. Dabei untersuchten Yang und Munz [92] thermische Lastfälle und in der Veröffentlichung von Pageau [66] werden insbesondere Verbindungen zwischen drei isotropen Materialien unter Berücksichtigung von Riss-situationen analysiert.

Mellin-Transformation

Die Technik der Mellin-Transformation wurde 1948 von Tranter [83] auf eine reelle Formulierung mit Airyschen Spannungsfunktionen angewendet, um singuläre Spannungen ebener elastomechanischer Probleme zu analysieren. Eine Erweiterung auf eine komplexe Formulierung wurde von Godfrey [39] im Jahre 1954 gegeben.

Eine Reihe von Analysen, die sich auf Bimaterialkonfigurationen mit unterschiedlichen Randbedingungen beziehen, basiert auf dieser Methode, wie etwa die Veröffentlichungen von Bogy [3, 5, 6, 8], Hein und Erdogan [44], Cook und Erdogan [22], Yang [89] sowie von Yang und Munz [91].

Analysen von Trimaterialkonfigurationen stammen beispielsweise von Inoue und Koguchi [46] sowie von Koguchi et. al. [53].

Nullstellen höherer Ordnung - Logarithmische Singularitäten

Bei der Eigenfunktion-Expansionsmethode wurden bereits *logarithmische Singularitäten* erwähnt. Es handelt sich dabei um Spannungssingularitäten von der Art $\sigma \sim r^{\operatorname{Re} \lambda - 1} \ln(r)$, diese können auftreten, wenn eine mehrfache Nullstelle λ des charakteristischen Polynoms vorliegt.

Dempsey und Sinclair [23] formulierten 1979 eine notwendige Bedingung für das Vorliegen einer logarithmischen Singularität, wobei eine Erweiterung der Eigenfunktion-Expansionsmethode nach Williams [87] verwendet wurde. Weitere Beiträge dieser Autoren stammen aus den Jahren 1981 (Dempsey und Sinclair [24]) und 1995 (Dempsey [25]).

Pageau et. al. [66] untersuchten logarithmische Singularitäten bei Trimaterialkonfigurationen. Joseph und Zhang [49] diskutierten und erweiterten den Ansatz vom Williams-Typ [87] um einen nicht-separablen Anteil, womit sie schließlich logarithmische Singularitäten identifizieren konnten.

Cho und Carpenter [10] erweiterten die Potentiale aus der Veröffentlichung von Theocaris [82] um geeignete Anteile und demonstrierten, dass auf diese Weise mit der komplexen Methode ebenfalls logarithmische Singularitäten identifiziert werden können.

Konfigurationen mit anisotropen Sektoren

Wie eingangs erwähnt, erfolgte beim bisherigen Überblick bewusst eine Einschränkung auf Konfigurationen, die ausschließlich aus isotropen Sektoren bestehen. Neben den zuvor genannten Veröffentlichungen existieren aber auch Publikationen, die anisotropes linear-elastisches Materialverhalten der einzelnen Sektoren berücksichtigen. Im Folgenden soll lediglich eine kleine Auswahl dieser Arbeiten genannt werden.

Die vermutlich erste Arbeit stammt aus dem Jahr 1965 von Sih et. al. [76] und basiert auf dem Lehrbuch von Lekhnitskii [57]. Lekhnitskii [57, 58] entwickelte die komplexe Methode von Kolosov [54] und Muschelischwili [65] für anisotrope Strukturen weiter und stellte geeignete Formalismen für diverse Problemstellungen bereit. Ein anderer Zugang für anisotrope Werkstoffe, der ebenfalls komplexe Formulierungen benutzt, geht auf Stroh [79] zurück. Die Veröffentlichung von Stroh [79] basiert auf einer Arbeit von Eshelby [36].

Neben der Publikation von Sih et. al. [76] stammen weitere frühe Veröffentlichungen aus den Jahren 1972 von Bogy [7] sowie 1974 von Kuo und Bogy [55], die eine komplexe Formulierung in Kombination mit einer verallgemeinerten Mellin-Transformation benutzten.

Basierend auf dem Stroh-Formalismus [79] wiesen Zwiers et. al. [94] die Existenz logarithmischer Singularitäten auch bei bestimmten anisotropen Konfigurationen nach.

1.3 Ziele und Aufbau der Arbeit

Die in Abschnitt 1.1 genannten asymptotischen Nahfeldanalysen erlauben es bei geringem Aufwand die Spannungs- und Verschiebungsverteilungen von Multi-Materialverbindungsstellen zu ermitteln. Dort wurde bereits erklärt, dass für umfassende Beurteilungen solcher Situationen, insbesondere im Hinblick auf bruchmechanische Fragestellungen, im Allgemeinen eine alleinige Analyse der Nahfelder (Spannungen, Verschiebungen) bzw. der Singularitätsordnungen nicht ausreicht. Dennoch liefern die Spannungs- und Verschiebungsverteilungen aus der linearen Elastizitätstheorie wichtige, grundlegende Informationen und damit einen zentralen Beitrag für mechanische Beurteilungen.

Themenbereiche im Umfeld asymptotischer Nahfeldanalysen erweisen sich als äußerst umfangreich. Daher schränken sich die Untersuchungen der vorliegenden Arbeit auf dieses Gebiet ein. Bruchmechanische Fragestellungen werden im Rahmen dieser Arbeit nicht behandelt.

Die vorliegende Arbeit möchte einige Beiträge zu asymptotischen Nahfeldanalysen an ebenen Multi-Materialverbindungsstellen mit der komplexen Methode leisten. Die Multi-Materialverbindungsstellen bestehen dabei aus Fügungen isotroper Sektoren und sind ausschließlich in ihrer Ebene belastet. Bei den Analysen steht insbesondere die Ermittlung der Singularitätsexponenten im Vordergrund.

Die theoretischen Darstellungen der Arbeit werden bewusst auf kein spezielles Anwen-

dungsbeispiel bezogen, sondern abstrakt gehalten, weil die Ergebnisse auf unterschiedlichste Bereiche angewendet werden können. Hier ist ein hohes Maß an Transferpotential gegeben. Bei den Analysen wird dies schließlich anhand spezieller Anwendungen demonstriert.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt aufgebaut: Dem einleitenden Kapitel folgt in Kapitel 2 eine Zusammenstellung der benötigten theoretischen Grundlagen, die sich auf das Wesentliche beschränkt. Hierzu wird eine Diskussion des mechanischen Verhaltens von Festkörpern geführt und im Anschluss werden einige wichtige Begriffe der linearen Elastizitätstheorie vorgestellt. Daran ist eine Beschreibung der komplexen Methode angeschlossen, die sich für ebene Probleme als sehr leistungsfähig erwiesen hat. Zuletzt wird der elementare Fall des Griffith-Risses ausführlich dargestellt.

Kapitel 3 stellt vom theoretischen Standpunkt aus gesehen das zentrale Kapitel dar, in dem die Vorgehensweise für die asymptotischen Nahfeldanalysen einiger Konfigurationen aus Kapitel 4 ausführlich vorgestellt und diskutiert wird. Dabei werden auch einige neue theoretische Beiträge geleistet. Das Vorgehen basiert auf einer komplexen Formulierung unter Verwendung eines auf Theocaris [82] zurückgehenden Ansatzes für die komplexen Potentiale, der aus einer geeigneten Kombination von Potenzfunktionen besteht, die sich dadurch auszeichnen, dass komplexwertige Exponenten explizit zugelassen sind. Nach Formulierung verschiedener Übergangs- und Randbedingungen wird diskutiert, welchen Einfluss die Einschränkung auf reelle Exponenten nach sich zieht, wobei ein Zusammenhang zwischen den beiden Vorgehensweisen herausgearbeitet wird, der für eine große Klasse von Multi-Materialkonfigurationen Gültigkeit besitzt. Im Anschluss daran werden die aus den verwendeten Potentialen resultierenden Spannungs- und Verschiebungsfelder betrachtet und es wird ein Vergleich mit den Feldern der analytischen Lösung des Griffith-Risses angestellt. Der darauf folgende Abschnitt ist den logarithmischen Singularitäten gewidmet, die dort ebenfalls im Rahmen der komplexen Methode behandelt werden. Hier wird nachgewiesen, dass das lineare Gleichungssystem für eine große Klasse von Multi-Materialkonfigurationen die gleiche Gestalt annimmt. Schließlich werden in den letzten Abschnitten Dundurs-Parameter vorgestellt sowie eine Zusammenfassung der Modellierung gegeben.

Aufbauend auf der in Kapitel 3 vorgestellten asymptotischen Methode werden in Kapitel 4 die Singularitätsordnungen einiger ausgewählter Bi- und Trimaterialkonfigurationen untersucht. Dabei wird für die Analysen eine im Rahmen dieser Arbeit erstellte Implementation in das Computeralgebrasystem MATHEMATICA verwendet. Bei der Analyse einer speziellen Bimaterialkonfiguration wird eine neue Methode vorgestellt, die es erlaubt in vielen Fällen geschlossen-analytische Lösungen zu ermitteln. Eine Besonderheit der Untersuchungen von Kapitel 4 stellt die Tatsache dar, dass bei zahlreichen einfachen Konfigurationen "Supersingularitäten", also Singularitäten, die stärker als die klassische $\frac{1}{\sqrt{r}}$ - Rissspitzen-Singularität sind, gefunden werden.

Im letzten Kapitel 5 wird schließlich eine Zusammenfassung mit einer abschließenden Diskussion gegeben.

Kapitel 2

Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel wird eine Zusammenstellung der in dieser Arbeit benötigten theoretischen Grundlagen gegeben. Im ersten Abschnitt wird eine knappe Diskussion des mechanischen Verhaltens von Festkörpern geführt. Danach werden einige wichtige Begriffe der linearen Elastizitätstheorie vorgestellt. Daran ist die Darstellung der komplexen Methode angeschlossen, die sich für ebene Probleme als sehr leistungsfähig erwiesen hat. Zuletzt wird der elementare Fall des Griffith-Risses ausführlich behandelt. Für das Verständnis der in Kapitel 3 vorgestellten Modellierung bzw. der dort geführten Herleitungen sind insbesondere die beiden letzten Abschnitte 2.3 und 2.4 von Bedeutung.

2.1 Mechanisches Verhalten von Festkörpern

Reale Materialien zeigen bei experimentellen Beobachtungen eine reichhaltige Palette an mechanischem Verhalten, so unterscheidet man zwischen Fluiden (Flüssigkeiten und Gase) sowie Festkörpern. Beide Klassen zeichnen sich dadurch aus, dass sie sich gegenüber Volumenänderungen ähnlich verhalten, gegenüber Formänderungen aber sehr unterschiedlich. Festkörper setzen Formänderungen einen Widerstand entgegen, Fluide nicht; sie fließen. Da auch Festkörper auf langen Zeitskalen fließen, ist diese Unterscheidung zwar nur von quantitativer Natur, aber dennoch sinnvoll, da die Viskosität von Festkörpern um viele Größenordnungen höher ist. Es gibt aber auch Materialien, die bei dieser Klassifikation nur schwer einzuordnen sind, wie zum Beispiel einige Emulsionen oder Polymere.

Innerhalb der Klasse der Festkörper zeigt sich unterschiedliches Verhalten, wie Elastizität, Viskoelastizität und Plastizität. In der Festkörperphysik bemüht man sich, das Materialverhalten aus dem mikroskopischen Aufbau der Stoffe abzuleiten. Um bei technischen Anwendungen Voraussagen treffen zu können, wird in den Ingenieurwissenschaften dagegen das mechanische Materialverhalten phänomenologisch mit Stoffgesetzen modelliert, wobei die Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik herangezogen werden, um das Deformationsverhalten von Kontinua zu beschreiben. Neben diesen müssen streng genommen auch die Gesetze der Thermodynamik beachtet werden, weil jede Deformation einen Wärmefluss verursacht, der örtlich und zeitlich veränderliche Temperaturunterschiede hervorruft.

Der elastische Fall soll nun genauer betrachtet werden. Er ist dadurch gekennzeichnet, dass die während einer Belastung hervorgerufenen Prozesse im Körper reversibel sind.

Es treten keine dissipativen Effekte wie z.B. plastische Verformungen auf. Der sogenannte Spannungszustand ist zeitunabhängig (insbesondere von der Deformationsgeschichte) und alleine durch den aktuellen Deformationszustand bzw. den sogenannten Verzerrungszustand festgelegt. Nach vollständiger Entlastung bleiben keine Verformungen bestehen.

Bei elastischem Materialverhalten spielen die zuvor erwähnten thermodynamischen Effekte eine untergeordnete Rolle, sie werden deswegen vernachlässigt. Deformationsvorgänge verlaufen demgemäß per Annahme isotherm ab, d.h. es besteht keine Wechselwirkung zwischen Verformungen und der Temperatur. Weiterhin erfolgen alle Belastungsvorgänge typischerweise quasistatisch, also sehr langsam. Daher können Trägheitskräfte und kinetische Energie unberücksichtigt bleiben. In vielen Fällen, die von technischer Bedeutung sind, zeigt sich bei Verformungen erst unter großen Belastungen ein nichtlineares Verhalten, während bei kleinen Lasten ein lineares Verhalten (lineare Elastizität) vorliegt. Im Rahmen dieser Arbeit wird das Gedankenmodell der linearen Elastizitätstheorie zugrunde gelegt. Diese wird im nächsten Abschnitt beschrieben.

2.2 Lineare Elastizitätstheorie

Im Folgenden werden einige wichtige Konzepte, Begriffe und Formeln der *linearen Elastizitätstheorie* zusammengestellt, ohne dabei Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben. "Linear" deutet an, dass diese Theorie auf kleine (infinitesimale) Verzerrungen sowie ein linear elastisches Stoffgesetz beschränkt ist. Für ausführliche Darstellungen sei etwa auf die Lehrbücher von Becker und Gross [2], Eschenauer und Schnell [34], Green und Zerna [42] sowie von Sadd [75] verwiesen.

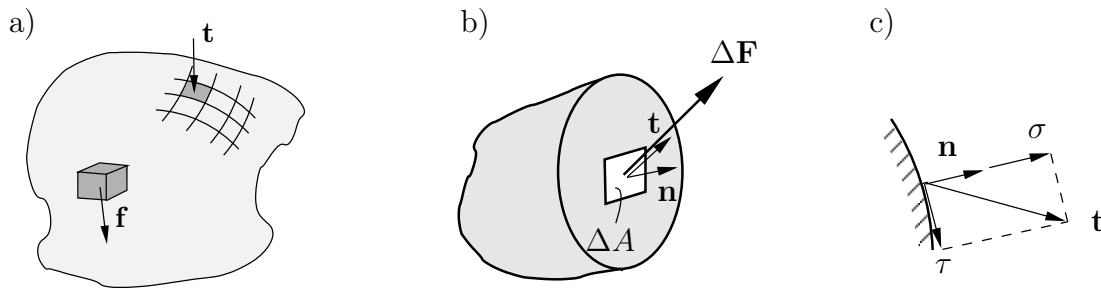
2.2.1 Spannungszustand

Ein Körper ist im Sinne der Elastizitätstheorie ein mit Materie kontinuierlich ausgefüllter räumlicher, flächenförmiger oder linienförmiger Bereich im Euklidischen Raum. Unter äußeren Belastungen (Volumenkräfte \mathbf{f} , Oberflächenkräfte \mathbf{t} , vgl. Abbildung 2.1a) werden innere Beanspruchungen - die *Spannungen* - verursacht. Kräfte sind mathematisch gesehen vektorielle Größen, und solche werden im Weiteren bei symbolischer Notation fettgedruckt dargestellt. Neben der symbolischen Notation wird auch alternativ bzw. parallel von der Indexnotation Gebrauch gemacht, bei der ein Vektor durch seine Komponenten (z.B. t_1, t_2, t_3) ausgedrückt wird. Bei beiden Notationen wird stillschweigend davon ausgegangen, dass die Vektorkomponenten einer vereinbarten Basis zugeordnet sind.

Nach Abbildung 2.1b wird ein gedachter Schnitt durch einen Körper in seinem augenblicklichen Zustand gelegt, wobei vorausgesetzt wird, dass der Körper sich im Gleichgewicht befindet. Dann wird an jedem Flächenelement ΔA der Schnittfläche eine Schnittkraft $\Delta \mathbf{F}$ übertragen, die sich gemäß des dritten Newtonschen Axioms mit einer gleich großen, entgegengesetzt wirkenden Kraft auf der gegenüberliegenden Fläche aufhebt. Der *Spannungsvektor* \mathbf{t} im Punkt P eines Körpers ist definiert durch:

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A} . \quad (2.1)$$

Dabei wird angenommen, dass dieser Grenzwert existiert und dass in der Schnittfläche nur

Abbildung 2.1: Volumen- und Flächenkräfte und Spannungsvektor \mathbf{t}

Kräfte aber keine Momente übertragen werden. Die Komponente τ des Spannungsvektors tangential zum Flächenelement ΔA nennt man *Schubspannung*, die Komponente in Richtung des (stets nach außen weisenden) Normalenvektors \mathbf{n} senkrecht zum Flächenelement heisst *Normalspannung* σ (vgl. Abbildung 2.1c) und es gilt:

$$\sigma = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} \quad , \quad \tau = \sqrt{\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} - \sigma^2} . \quad (2.2)$$

Da der Spannungsvektor von der Schnittrichtung abhängt, kann aus seiner Kenntnis für einen speziellen Schnitt nicht auf den Spannungszustand im Punkt P eines Körpers geschlossen werden. Es lässt sich jedoch zeigen, dass durch die Angabe von drei Spannungsvektoren für drei Schnitte mit linear unabhängigen Normalenvektoren der Spannungszustand im Punkt P eindeutig festgelegt ist. Es ist zweckmäßig den Spannungszustand anhand eines Elementarquaders darzustellen, dessen Kanten parallel zu einem kartesischen Koordinatensystem verlaufen, vgl. Abbildung 2.2.

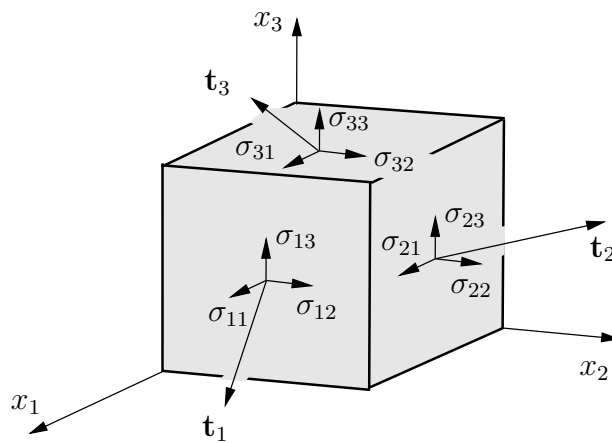


Abbildung 2.2: Spannungskomponenten am Elementarquader

Dabei werden die üblichen Vorzeichenkonventionen eingehalten: Spannungen sind positiv, wenn sie auf einem positiven bzw. negativen Schnittufer in positive bzw. negative Richtung zeigen. Ein Schnittufer wird positiv bzw. negativ genannt, wenn der nach außen weisende Normalenvektor in positive bzw. negative Koordinatenrichtung zeigt. So lässt sich zum Beispiel der Spannungsvektor \mathbf{t}_1 in der Form $\mathbf{t}_1 = \sigma_{11} \mathbf{e}_1 + \sigma_{12} \mathbf{e}_2 + \sigma_{13} \mathbf{e}_3 = \sigma_{1i} \mathbf{e}_i$ darstellen. Hierbei sind die Vektoren \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, 3$) die kartesischen Einheitsvektoren und es wurde Gebrauch von der *Einsteinschen Summationskonvention* gemacht. Nach dieser wird über einen Ausdruck summiert, wenn in ihm ein und derselbe Index doppelt vorkommt; der

betreffende Index durchläuft dann die Werte 1, 2, 3. Damit folgt allgemein:

$$\mathbf{t}_j = \sigma_{ji} \mathbf{e}_i, \quad j = 1, 2, 3. \quad (2.3)$$

Die auf den positiven Schnittufern wirkenden Spannungsvektoren lassen sich in der folgenden Weise in einer Matrix zusammenfassen:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Die Größe $\boldsymbol{\sigma}$, für deren Komponenten auch vereinfachend σ_{ij} (Indexnotation) geschrieben wird, ist der *Cauchysche Spannungstensor* zweiter Stufe. Der Tensorcharakter von $\boldsymbol{\sigma}$ lässt sich erkennen, wenn das Gleichgewicht an einem infinitesimalen Tetraeder nach Abbildung 2.3a betrachtet wird.

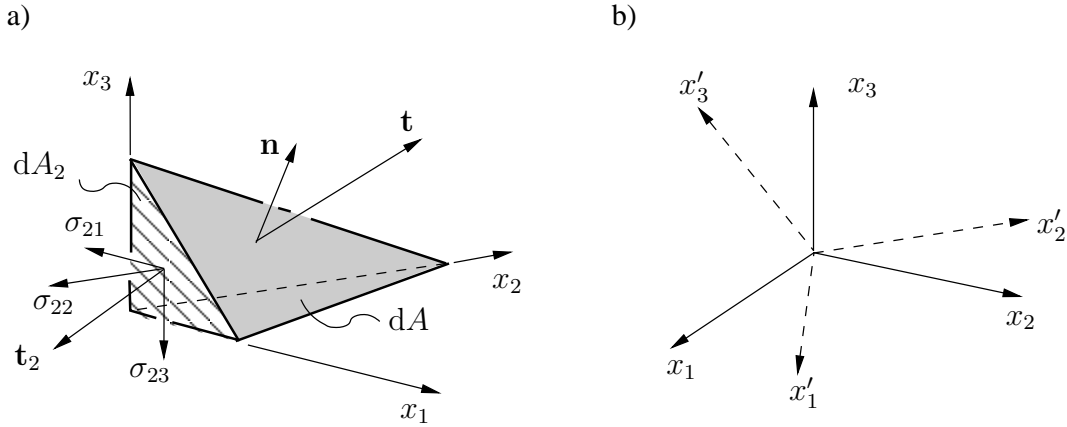


Abbildung 2.3: Tetraederelement mit angreifenden Kräften und Drehung des Koordinatensystems

Dabei werden Volumenkräfte vernachlässigt, da sie von höherer Ordnung klein sind. Wenn die Orientierung der Flächenelemente dA_i durch den Normalenvektor \mathbf{n} , bzw. dessen Komponenten gegeben ist, lautet das Kräftegleichgewicht $\mathbf{t} dA = \mathbf{t}_i dA_i$. Dann folgt mit $\mathbf{t} = t_i \mathbf{e}_i$ und (2.3):

$$\mathbf{t}_j = \sigma_{ji} \mathbf{n}_i \quad \text{oder symbolisch} \quad \mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}. \quad (2.5)$$

Gleichung (2.5) wird als das *Cauchysche Theorem* bezeichnet, und stellt eine lineare Abbildung zwischen den Vektoren \mathbf{t} und \mathbf{n} dar. Aufgrund des lokalen Momentengleichgewichts, auf das nicht näher eingegangen werden soll, ist der Spannungstensor symmetrisch:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{bzw. symbolisch} \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T. \quad (2.6)$$

Daher sind nur sechs der neun Komponenten des Spannungstensors unabhängig voneinander.

Legt man ein anderes, gegenüber dem x_1, x_2, x_3 - Koordinatensystem gedrehtes System x'_1, x'_2, x'_3 wie in Abbildung 2.3b zugrunde, so gilt die Transformationsbeziehung für die entsprechenden Komponenten σ'_{ij} :

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{kl} \alpha_{ik} \alpha_{jl}. \quad (2.7)$$

In Gleichung (2.7) wird sowohl über k als auch über l summiert und die dabei auftretenden Transformationskoeffizienten α_{ik} sind als Skalarprodukt (Richtungscosinus) zwischen den Basisvektoren gegeben:

$$\alpha_{ik} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_k \quad \text{bzw.} \quad \alpha_{ik} = \cos(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_i) . \quad (2.8)$$

Hauptachsensystem

Ein besonderes System ist das *Hauptachsensystem*. Es zeichnet sich dadurch aus, dass in den zugehörigen Schnitten keine Schubspannungen auftreten, sondern nur Normalspannungen - *Hauptspannungen* genannt - wirken. Spannungs- und Normalenvektor sind demgemäß gleichgerichtet, das heisst wenn der Normalenvektor \mathbf{n}_i eine Hauptrichtung kennzeichnet, dann gilt für den Spannungsvektor $\mathbf{t}_i = \sigma \mathbf{n}_i$, wobei σ die entsprechende Hauptspannung ist. Mit Gleichung (2.5) folgt:

$$(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij})n_j = 0 \quad \text{bzw. symbolisch} \quad (\boldsymbol{\sigma} - \sigma \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} = 0 . \quad (2.9)$$

Darin ist δ_{ij} das *Kronecker-Symbol* mit den Eigenschaften $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$. Die Größe \mathbf{I} ist der Einheitstensor zweiter Stufe mit den Komponenten δ_{ij} .

Offensichtlich handelt es sich bei dem homogenen Gleichungssystem (2.9) um ein Eigenwertproblem mit den Eigenwerten σ und den zugehörigen Eigenvektoren \mathbf{n} . Es hat nur dann eine nichttriviale Lösung, wenn die Koeffizientendeterminante $\det(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) = 0$ verschwindet. Hieraus folgt die kubische Gleichung

$$\sigma^3 - I_\sigma \sigma^2 - II_\sigma \sigma - III_\sigma = 0 \quad (2.10)$$

mit den Größen

$$\begin{aligned} I_\sigma &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{kk} , \\ II_\sigma &= \frac{1}{2}(\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \sigma_{ii}\sigma_{jj}) , \\ III_\sigma &= \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \det(\sigma_{ij}) , \end{aligned} \quad (2.11)$$

die unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems sind und daher als *Invarianten* bezeichnet werden.

Gleichung (2.10) besitzt drei reelle Lösungen, die Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Es lässt sich zeigen, dass die zugehörigen Eigenvektoren (auch Hauptrichtungen genannt), die sich aus (2.9) ermitteln lassen, senkrecht aufeinander stehen.

Auf weitere Begriffe und Konzepte wie Hauptschubspannungen, Mohrsche Kreise, additive Zerlegung des Spannungstensors in Kugeltensor und Deviator soll hier nicht eingegangen werden.

2.2.2 Gleichgewichtsbedingungen

Bisher wurde nur der Spannungszustand an einem Punkt P eines Körpers betrachtet. Um zu Aussagen über das gesamte Spannungsfeld zu gelangen, wird ein beliebiges, endlich großes Teilvolumen V mit Oberfläche A aus dem Körper herausgeschnitten. Die Belastungen sind durch die Volumenkraft f_i und die Oberflächenbelastung t_i gegeben. Damit sich der betrachtete Teilkörper im Gleichgewicht befindet, muss die Summe der äußeren Kräfte verschwinden:

$$\int_V f_i dV + \int_A t_i dA = 0 . \quad (2.12)$$

Mit der Cauchyschen Formel (2.5) und unter Verwendung des Gaußschen Satzes $\int_{\partial V} \sigma_{ij} n_j dA = \int_V \sigma_{ij,j} dV$ folgt schließlich

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + f_i) dV = 0 , \quad (2.13)$$

wobei durch den Index "j" hinter dem Komma die partielle Ableitung $\partial \sigma_{ij} / \partial x_j$ gekennzeichnet wird. Für ein beliebiges Volumen V kann diese Beziehung nur dann erfüllt sein, wenn in jedem Punkt des Körpers die *Gleichgewichtsbedingungen*

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (2.14)$$

gültig sind. Mit (2.14) stehen lediglich drei Gleichungen für die sechs unabhängigen Spannungskomponenten zur Verfügung; das System ist statisch unbestimmt.

Wenn entlang eines Bereichs der Oberfläche (des Randes) die äußere Belastung t_i^* vorgeschrieben ist, muss die Randbedingung $t_i = t_i^*$ erfüllt sein. Zusammen mit (2.5) folgen die *Spannungsrandbedingungen*:

$$\sigma_{ij} n_j = t_i^* . \quad (2.15)$$

Wenn man die bei einer Bewegung auftretenden Trägheitskräfte $-\rho a_i$ als Volumenkräfte auffasst, erhält man die Bewegungsgleichungen

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho a_i , \quad (2.16)$$

mit der Massedichte ρ des Materials. Die Beziehungen (2.16) stellen die Bewegungsgleichungen in lokaler Form dar und spielen bei der Beschreibung von Wellenausbreitungsvorgängen eine wichtige Rolle.

2.2.3 Verzerrungen

Die Kinematik eines deformierbaren Festkörpers wird üblicherweise durch die Verschiebungen der einzelnen Punkte und durch die lokalen Verzerrungen beschrieben. Dazu unterscheidet man zwei ausgezeichnete Konfigurationen eines deformierbaren Körpers (Abbildung 2.4), die *Bezugskonfiguration/Referenzkonfiguration* (der undeformierte Ausgangszustand) und die *Momentankonfiguration* (der aktuelle, deformierte Zustand). Man betrachtet einen beliebigen materiellen Punkt bzw. Partikel P , dessen Lage in der Referenzkonfiguration durch den Ortsvektor \mathbf{X} gekennzeichnet ist, sowie einen benachbarten Punkt

Q mit dem Ortsvektor $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$. Die Komponenten X_i des Ortsvektors \mathbf{X} werden auch als *materielle Koordinaten* bezeichnet. Durch die Deformation geht der Körper in die Momentankonfiguration über, wobei die Punkte P bzw. Q sich nach P' bzw. Q' verschieben. Ihre aktuelle Lage ist dann durch \mathbf{x} bzw. $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ gegeben und mit diesen Ortsvektoren kann die Verschiebung von P nach P' durch den *Verschiebungsvektor* $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$ ausgedrückt werden.

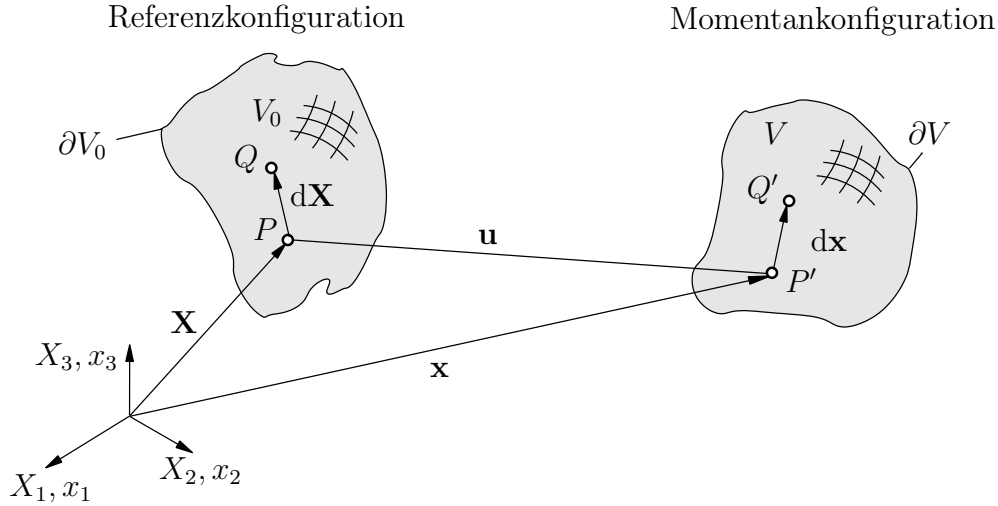


Abbildung 2.4: Deformation eines Körpers

Die Beschreibung der Lageänderung kann nun auf zwei verschiedenen Arten erfolgen, der sogenannten *Eulerschen* und der *Lagrangeschen Beschreibung*. Bei der *Lagrangeschen Beschreibung* fasst man Zustandsgrößen wie z.B. den Verschiebungsvektor \mathbf{u} oder die Temperatur T als Funktion der materiellen Koordinaten X_i und der Zeit auf:

$$T = T(X_1, X_2, X_3, t) \quad , \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(X_1, X_2, X_3, t) . \quad (2.17)$$

Anschaulich gesprochen verfolgt man das Schicksal des Partikels \mathbf{X} . Bei der *Eulerschen Beschreibung* wird dagegen jede Zustandsgröße als Funktion der Ortskoordinaten x_i aufgefasst:

$$T = T(x_1, x_2, x_3, t) \quad , \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t) . \quad (2.18)$$

Hier wird anschaulich gedeutet der Zustand an einem festen Ort betrachtet. In der Festkörpermechanik wird meistens die Lagrangesche Beschreibung bevorzugt und daher wird diese im Folgenden zugrundegelegt. Unter der Voraussetzung, dass zwischen den Koordinaten x_i und X_i eine umkehrbar eindeutige Zuordnung besteht, lassen sich der Ortsvektor \mathbf{x} und der Verschiebungsvektor \mathbf{u} als Funktion der materiellen Koordinaten auffassen: $\mathbf{x} = \mathbf{x}(X_1, X_2, X_3, t)$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(X_1, X_2, X_3, t)$.

Ohne auf weitere Details einzugehen, vergleicht man zur Herleitung eines geeigneten Deformationsmaßes die Abstandquadrate benachbarter Punkte in der Referenzkonfiguration und der Momentankonfiguration, um sie dann auf die Ausgangskonfiguration zu beziehen. Man gelangt so zum symmetrischen *Green-Lagrangeschen Verzerrungstensor* zweiter Stufe, dessen Komponenten durch

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \quad (2.19)$$

gegeben sind.

Im Falle hinreichend kleiner Verschiebungsgradienten $\partial u_i / \partial X_j \ll 1$ lässt es sich zeigen, dass die Ableitungen nach den materiellen Koordinaten X_j durch die Ableitungen nach den räumlichen Koordinaten x_j ersetzt werden können. Unter Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung erhält man schließlich den *linearisierten Verzerrungstensor* zweiter Stufe

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) , \quad (2.20)$$

der sich in vielen technischen Fällen als völlig hinreichend für die Darstellung von Verzerrungen erweist.

In Matrixform nimmt der infinitesimale Verzerrungstensor die Gestalt

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

an, die wegen $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ symmetrisch ist. Die Diagonalelemente nennt man *Dehnungen* und die Nichtdiagonalelemente werden als *Schubverformungen* oder *Gleitungen* bezeichnet. Die Größen γ_{xy} , γ_{xz} und γ_{yz} werden *technische Gleitungen* genannt.

Kompatibilität

Sind die 3 Komponenten u_i eines Verschiebungsfeldes bekannt, können mit Gleichung (2.20) aus ihnen die 6 unabhängigen Komponenten ε_{ij} des infinitesimalen Verzerrungstensors durch entsprechendes Differenzieren bestimmt werden:

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} . \quad (2.22)$$

Wenn umgekehrt die Verzerrungen bekannt sind, stehen 6 Gleichungen für die 3 unbekannten Verschiebungskomponenten zur Verfügung. Das Gleichungssystem ist damit kinematisch überbestimmt. Demnach können die Verzerrungen nicht unabhängig voneinander sein, sondern müssen den *Kompatibilitätsbedingungen/Verträglichkeitsbedingungen* genügen. Mechanisch gedeutet besagen diese, dass der stetige Zusammenhang im Körper nach der Deformation bestehen bleiben muss; es dürfen keine Lücken oder Überlappungen auftreten. Die Kompatibilitätsbedingungen lauten:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 . \quad (2.23)$$

Im Spezialfall rein ebener Probleme ($\varepsilon_{i3} = 0$, $i = 1, 2, 3$ und $(\cdot)_{,3} = 0$) resultiert die Beziehung:

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} = 0 . \quad (2.24)$$

Auf weitere Begriffe und Konzepte wie Transformationsbeziehungen, Hauptdehnungen sowie die additive Zerlegung des infinitesimalen Verzerrungstensors in Kugeltensor und Deviator soll hier nicht eingegangen werden.

2.2.4 Elastizitätsgesetz

Zur Ermittlung der Spannungen und Verformungen in einem Körper reichen die Gleichgewichtsbedingungen sowie die kinematischen Beziehungen nicht aus. Um das mechanische Verhalten eines Körpers zu beschreiben, müssen zusätzlich noch die *konstitutiven Gleichungen* bzw. das *Stoffgesetz* herangezogen werden, die einen Zusammenhang zwischen Spannungs- und Verzerrungszustand herstellen. Das Stoffgesetz kann nur mit Hilfe von Experimenten gewonnen werden. Verhält sich ein Material in allen Punkten gleich, nennt man es *homogen*, andernfalls *inhomogen*. Wenn die Materialeigenschaften von der Richtung unabhängig sind, bezeichnet man es als *isotrop*. Sind die Eigenschaften dagegen abhängig von der Richtung, spricht man von einem *anisotropen* Material.

Häufig besteht ein linearer Zusammenhang zwischen den Spannungen und Verzerrungen:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{bzw. symbolisch} \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} . \quad (2.25)$$

Die Größen C_{ijkl} sind dabei die $3^4 = 81$ Komponenten des *Elastizitätstensors* \mathbf{C} vierter Stufe. Der Doppelpunkt bei der symbolischen Schreibweise weist darauf hin, dass über zwei Indexpaare summiert wird. Körper mit einem solchen Verhalten werden auch als *Hookesche Körper* bezeichnet.

Es lässt sich zeigen, dass nicht alle Komponenten C_{ijkl} unabhängig voneinander sind, sondern dass im allgemeinsten Fall der Anisotropie maximal 21 Unabhängige vorliegen. Weiterhin gilt, dass \mathbf{C} im isotropen Fall durch lediglich zwei unabhängige elastische Konstanten λ und μ bestimmt ist. Dann nimmt das Elastizitätsgesetz die Gestalt

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu \varepsilon_{ij} \quad (2.26)$$

an. Die beiden Größen λ und μ werden *Lamésche Konstanten* genannt.

Technisch gebräuchlicher sind der Elastizitätsmodul E , der Schubmodul G und die Querkontraktionszahl ν . Zwischen ihnen bestehen die Zusammenhänge:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad \text{bzw.} \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)} . \quad (2.27)$$

2.2.5 Grundgleichungen - Randbedingungen

Mit den in den Abschnitten 2.2.2, 2.2.3 und 2.2.4 zur Verfügung gestellten Gleichgewichtsbedingungen, der Kinematik (Verzerrungen) und dem Stoffgesetz, stehen die sogenannten *Grundgleichungen* der linearen (statischen) Elastizitätstheorie zur Formulierung und Lösung von Randwertproblemen bereit.

Zur eindeutigen Lösung sind noch die Randbedingungen zu berücksichtigen, die von den Feldgrößen $(u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij})$ erfüllt werden müssen. Man unterscheidet:

- *Erstes Randwertproblem*: Auf der gesamten Körperoberfläche sind Spannungsrandbedingungen vorgegeben.
- *Zweites Randwertproblem*: Auf der gesamten Körperoberfläche sind Verschiebungsrandbedingungen vorgegeben.

- *Drittes Randwertproblem*: Auf einem Teil der Körperoberfläche sind Spannungs- und auf dem anderen Teil Verschiebungsrandbedingungen vorgegeben.

Neben den Grundgleichungen stehen zur Lösung von Randwertproblemen noch die Kompatibilitätsbedingungen zur Verfügung. Sie können alternativ oder zusätzlich zu den kinematischen Beziehungen verwendet werden.

Wegen der Linearität gilt das *Superpositionsprinzip*: Mit zwei Lösungen $\sigma_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(1)}, u_i^{(1)}$ und $\sigma_{ij}^{(2)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}, u_i^{(2)}$ ist auch eine beliebige Linearkombination $c_1\sigma_{ij}^{(1)} + c_2\sigma_{ij}^{(2)}, c_1\varepsilon_{ij}^{(1)} + c_2\varepsilon_{ij}^{(2)}, c_1u_i^{(1)} + c_2u_i^{(2)}$ eine Lösung der Grundgleichungen.

Darüber hinaus gilt bei Randwertproblemen der linearen Elastizitätstheorie, dass Lösungen von Randwertproblemen eindeutig sind, sofern sie existieren.

2.2.6 Formänderungsenergiedichte

Bei der Deformation eines elastischen Körpers leisten die inneren Kräfte (Spannungen) pro Volumeneinheit die Arbeit:

$$W = \int_0^\varepsilon \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} . \quad (2.28)$$

Man bezeichnet W auch als *spezifische Formänderungsarbeit*. Diese ist wegen des elastischen Verhaltens unabhängig vom Deformationsweg. Daraus folgt, dass das Arbeitsinkrement $dW = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$ das vollständige Differential dU einer Zustandsgröße, der sogenannten *Formänderungsenergiedichte* $U(\varepsilon_{ij})$ sein muss. Es folgt

$$\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = dU = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} \quad (2.29)$$

und damit gilt für die Spannungen:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} . \quad (2.30)$$

Daneben lässt sich noch eine *spezifische Komplementärenergie* $\tilde{U}(\sigma_{ij})$ wie folgt einführen:

$$\tilde{U} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - U = \int_0^\sigma \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} . \quad (2.31)$$

Analog zu (2.29) lassen sich die Verzerrungen in der Form

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.32)$$

ausdrücken.

Bei linear elastischem Materialverhalten zeigt sich schließlich, dass die spezifische Formänderungsenergie U bzw. die spezifische Komplementärenergie sich als homogene quadratische Form in den Verzerrungen darstellen lässt:

$$U = \tilde{U} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} . \quad (2.33)$$

2.2.7 Ebene Probleme

In vielen Fällen der Festkörpermechanik liegen ebene bzw. zweidimensionale Probleme vor, oder sie können wenigstens näherungsweise als solche aufgefasst werden. Dann reduziert sich die Zahl der Unbekannten sowie der Satz der Grundgleichungen. Dementsprechend lassen sich solche Probleme einfacher behandeln. Von besonderer Bedeutung für die Anwendungen sind der *ebene Verzerrungszustand* (EVZ) und der *ebene Spannungszustand* (ESZ), die mit der gebräuchlichen Notation, also mit den Koordinaten x, y, z , den Verschiebungen u, v, w , den Verzerrungen $\varepsilon_x, \gamma_{xy}, \dots$ und den Spannungen $\sigma_x, \tau_{xy}, \dots$ beschrieben werden sollen.

Ebener Verzerrungszustand

Falls bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems die Verschiebungskomponente w im ganzen Körper verschwindet, gleichzeitig die beiden anderen Verschiebungskomponenten u und v nur von den Koordinaten x und y abhängen, liegt ein *ebener Verzerrungszustand* vor. Dann verschwinden sämtliche Verzerrungskomponenten in z -Richtung

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0, \quad (2.34)$$

es verbleiben die nichtverschwindenden Verzerrungen

$$\varepsilon_x(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.35)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen (ohne Volumenkräfte) und die Verträglichkeitsbedingungen reduzieren sich dann auf:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = 0, \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (2.37)$$

Auch das Stoffgesetz vereinfacht sich. Für ein isotropes, linear-elastisches Material lässt sich mit (2.26) und (2.27) zeigen, dass

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1 - \nu^2}{E} \left(\sigma_x - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_y \right), \\ \varepsilon_y &= \frac{1 - \nu^2}{E} \left(\sigma_y - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_x \right), \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{xy} \end{aligned} \quad (2.38)$$

gilt.

Mit dem *Ersatz-Elastizitätsmodul* $E' := \frac{E}{1 - \nu^2}$ und der *Ersatz-Querkontraktionszahl* $\nu' := \frac{\nu}{1 - \nu}$ lässt sich das Hookesche Gesetz im EVZ schließlich wie folgt darstellen:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E'} (\sigma_x - \nu' \sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E'} (\sigma_y - \nu' \sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1 + \nu')}{E'} \tau_{xy}. \quad (2.39)$$

Ebener Spannungszustand

Beim *ebenen Spannungszustand* (ESZ) wird angenommen, dass sämtliche Spannungskomponenten in z - Richtung verschwinden $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$ und die verbleibenden Spannungen von z unabhängig sind. Ein derartiger Zustand ist im Gegensatz zum EVZ nicht exakt im Sinne der Elastizitätstheorie, aber praktisch von großer Bedeutung. Er tritt näherungsweise in Scheiben auf, die im Vergleich zu den Abmessungen in der Ebene eine geringe Dicke besitzen und nur durch Kräfte in der Ebene belastet werden.

Die kinematischen Beziehungen beim ebenen Spannungszustand lauten:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) . \quad (2.40)$$

Beim ESZ lässt sich das isotrope Hookesche Gesetz mit $G = E/(2(1+\nu))$ in der folgenden Form darstellen:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \quad , \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \quad , \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \quad , \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \quad , \quad \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 . \end{aligned} \quad (2.41)$$

Die drei ersten Beziehungen für ε_x , ε_y und γ_{xy} unterscheiden sich gegenüber den entsprechenden Gleichungen (2.39) des ebenen Verzerrungszustandes nur durch die elastischen Konstanten. Im Falle des ESZ treten der Elastizitätsmodul E und die Querkontraktionszahl ν an die Stelle der entsprechenden Ersatzgrößen E' und ν' im Falle des EVZ. Durch die vierte Beziehung für ε_z wird eine mögliche Dickenänderung der Scheibe bei Vorliegen eines ebenen Spannungszustandes beschrieben.

Die Gleichgewichtsbedingungen und die Kompatibilitätsbedingungen entsprechen den Gleichungen (2.36) und (2.37) des ebenen Verzerrungszustandes. Stellt man die Grundgleichungen des ESZ und des EVZ gegenüber, lässt sich bis auf die elastischen Konstanten eine völlige Übereinstimmung erkennen. Daher können Lösungen von Randwertproblemen des ESZ durch Änderung der Elastizitätskonstanten auf Lösungen des EVZ übertragen werden und umgekehrt.

Scheibengleichung

Unter einer Scheibe versteht man ein ebenes Flächentragwerk, bei dem die Dicke t klein gegenüber den anderen Abmessungen ist und das nur durch Kräfte in seiner Ebene belastet wird. Im Folgenden wird eine Scheibe im ebenen Spannungszustand mit verschwindenden Volumenkräften betrachtet, d.h. die Scheibe wird lediglich durch Randlasten belastet.

Eliminiert man aus der Kompatibilitätsbedingung (2.37) mit Hilfe des Stoffgesetzes (2.41) die Verzerrungen, so resultiert:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = -2(1+\nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} . \quad (2.42)$$

Differentiation der ersten Gleichgewichtsbedingung aus (2.36) nach x , der zweiten nach y und abschließende Addition der beiden Gleichungen ergibt unter Berücksichtigung von

$f_x = f_y = 0$:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} . \quad (2.43)$$

Damit lässt sich die Kompatibilitätsbedingung in der Form

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (2.44)$$

angeben, wobei $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ der zweidimensionale *Laplace*-Operator ist.

Mit Gleichung (2.44) und den Gleichgewichtsbedingungen (2.36) steht ein System von drei Gleichungen für die drei Spannungskomponenten σ_x , σ_y , τ_{xy} zur Verfügung. Dieses System lässt sich weiter reduzieren, indem man eine Funktion $F = F(x, y)$ wie folgt einführt:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} , \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} , \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} . \quad (2.45)$$

Die Funktion $F(x, y)$ nennt man *Airysche Spannungsfunktion*. Auf diese Weise werden die Gleichgewichtsbedingungen (2.36) für eine beliebige Wahl von F identisch erfüllt, und die Kompatibilitätsbedingung (2.44) nimmt die Gestalt

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Delta \Delta F = 0 \quad (2.46)$$

an. Das ebene Problem ist damit auf eine einzige partielle Differentialgleichung vierter Ordnung zurückgeführt, die auch als *Scheibengleichung* oder *Bipotentiale Gleichung* bezeichnet wird.

Die Bipotentiale Gleichung besitzt auch bezüglich anderer Koordinatensysteme Gültigkeit. Zum Beispiel gilt bei Verwendung von Polarkoordinaten r und φ :

$$\begin{aligned} \Delta \Delta F = & \frac{\partial^4 F}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 F}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \right) \\ & + \frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial F}{\partial r} - 2 \frac{\partial^3 F}{\partial r \partial \varphi^2} \right) + \frac{1}{r^4} \left(4 \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial \varphi^4} \right) = 0 . \end{aligned} \quad (2.47)$$

Eine allgemeine Lösung der Bipotentiale Gleichung (2.46) ist zwar nicht bekannt, man kann jedoch spezielle Lösungen herleiten, bzw. auf einen Lösungskatalog zurückgreifen. Werden sämtliche Randbedingungen durch eine geeignete Funktionen erfüllt, ist das ebene Problem bezüglich der Spannungen gelöst. Die Verschiebungen können anschließend in Verbindung mit dem Elastizitätsgesetz aus den Verzerrungen durch Integration bestimmt werden.

Nach (2.44) erfüllt die Spannungssumme $\sigma_x + \sigma_y$ die Potentialgleichung und ist daher eine harmonische Funktion. Da Real- und Imaginärteil einer analytischen Funktion der komplexen Veränderlichen z harmonisch sind, liegt es nahe, zur Lösung ebener Probleme die Theorie komplexer Funktionen heranzuziehen. Diese wird im nächsten Abschnitt skizziert.

2.3 Komplexe Methode

Zur Lösung ebener Randwertprobleme der linearen Elastizitätstheorie steht eine ganze Reihe verschiedener Verfahren zur Verfügung. Im Fall verschwindender Volumenkräfte hat sich die Methode der komplexen Spannungsfunktionen als ein besonders fruchtbares Verfahren erwiesen. Den Grundstein hat Goursat [41] im Jahre 1898 gelegt, indem er zeigte, dass sich die allgemeine Lösung einer biharmonischen Differentialgleichung durch zwei analytische Funktionen in der komplexen Zahlenebene darstellen lässt. 1909 erschien eine Veröffentlichung von Kolosov [54], in der bewiesen wird, dass sich die Spannungen und Verschiebungen eines ebenen isotropen Randwertproblems mithilfe zweier komplexwertiger Funktionen bzw. Potentiale ausdrücken lassen. Zahlreiche Weiterentwicklungen sowie die wohl umfassendste Beschreibung stammen schließlich von Muschelischwili [65]. Im Folgenden wird die Methode kurz skizziert, und es werden die für die Arbeit nötigen Formeln vorgestellt. Für ausführliche Darstellungen sei neben dem Buch von Muschelischwili [65] auch auf das moderne Lehrbuch von Sadd [75] verwiesen.

Bei der Methode der komplexen Spannungsfunktionen werden die Verschiebungen und Spannungen als Funktion der komplexen Variablen $z = x + iy$ aufgefasst und es lässt sich zeigen [65], dass Lösungen der Grundgleichungen des EVZ und des ESZ aus zwei holomorphen Potentialen Φ und Ψ konstruiert werden können. Der Weg durch das Komplexe mag gewöhnungsbedürftig erscheinen, insbesondere da alle auftretenden physikalischen Größen von reeller Natur sind. Der entscheidende Vorteil besteht darin, dass die Grundgleichungen ebener Probleme (Gleichgewicht, Kinematik, Hookesches Gesetz) für eine beliebige Wahl der Potentiale automatisch identisch erfüllt sind, so dass für die Lösung eines Randwertproblems die Potentiale lediglich so zu wählen sind, dass die gegebenen Randbedingungen erfüllt werden. Mit der komplexen Methode lassen sich die ebenen Spannungen $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ und Verschiebungen u, v wie folgt darstellen:

$$\sigma_x + \sigma_y = 2[\Phi'(z) + \overline{\Phi'(z)}], \quad (2.48)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\Phi''(z) + \Psi'(z)], \quad (2.49)$$

$$2\mu(u + iv) = \kappa\Phi(z) - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)}. \quad (2.50)$$

Dies sind die *Kolosovschen Formeln*, in denen hochgestellte Striche die erste bzw. zweite Ableitung nach dem komplexen Argument z kennzeichnen und ein Querstrich die komplexe Konjugation bedeutet. Die Größe μ bezeichnet den Schubmodul und κ ist eine Materialkonstante, die mit der Querkontraktionszahl ν für den ebenen Spannungszustand (ESZ) bzw. ebenen Verzerrungszustand (EVZ) wie folgt zusammenhängt:

$$\kappa = \begin{cases} \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{ESZ,} \\ 3-4\nu & \text{EVZ.} \end{cases} \quad (2.51)$$

Oft ist es zweckmäßig, Polarkoordinaten r, φ zu verwenden. Dann stellt man die komplexen Variablen z und \bar{z} mit der komplexen Exponentialfunktion in der Form $z = re^{i\varphi}$, $\bar{z} = re^{-i\varphi}$ dar und bringt die Kolosovschen Gleichungen durch Koordinatentransformation in die

Form

$$\sigma_r + \sigma_\varphi = 2 \left[\Phi'(z) + \overline{\Phi'(z)} \right], \quad (2.52)$$

$$\sigma_\varphi - \sigma_r + 2i \tau_{r\varphi} = 2 \left[z\Phi''(z) + \Psi'(z) \frac{z}{\bar{z}} \right], \quad (2.53)$$

$$2\mu(u_r + i u_\varphi) = \left[\kappa\Phi(z) - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)} \right] e^{-i\varphi}. \quad (2.54)$$

Für die Formulierung von Randbedingungen ist es häufig zweckmäßig Beziehungen zwischen Φ , Ψ und den resultierenden Kraftkomponenten F_x , F_y auf ein Randbogenstück zu verwenden.

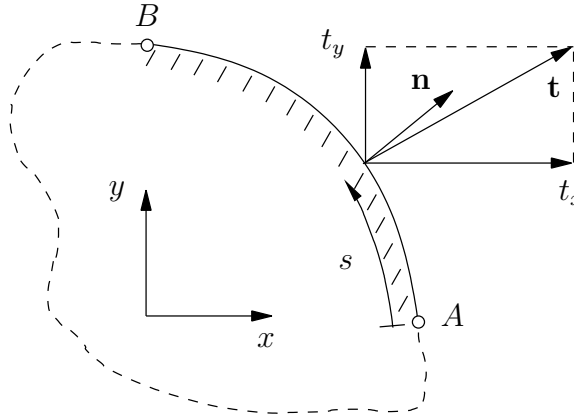


Abbildung 2.5: Randbogenstück AB und Spannungsvektor

Hierfür betrachtet man ein Randbogenstück AB wie in Abbildung 2.5 und wählt dort der Bestimmtheit wegen die Richtung von A nach B als positiv. Gleichzeitig führt man den Normalenvektor \mathbf{n} derart ein, dass die Normale in positiver Kurvenrichtung gesehen nach rechts zeigt. Dann gilt für den sogenannten *komplexen Spannungsvektor* $t_x + i t_y$:

$$t_x + i t_y = -i \frac{d}{ds} \left[\Phi(z) + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} \right]. \quad (2.55)$$

Durch Integration ergibt sich die resultierende Kraft auf das Randbogenstück (von der Seite der positiven Normalen her wirkend):

$$F_x + i F_y = \int_A^B (t_x + i t_y) ds = -i \left[\Phi(z) + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} \right]_A^B. \quad (2.56)$$

Wegen der obigen Konvention für die Orientierung bzw. die Normale muss die Integration über das Randstück dabei so vorgenommen werden, dass sich der Körper anschaulich gesprochen links vom Integrationsweg befindet. Mit $\left[\right]_A^B$ wird der Zuwachs des in Klammern stehenden Ausdrucks beim Durchlaufen des Kurvenstücks von A nach B bezeichnet; hier sei insbesondere darauf hingewiesen, dass die Kraft nicht von der Form des Kurvenstücks AB abhängt.

Schließlich lässt sich auch das resultierende Moment M der betrachteten Kräfte bezüglich des Koordinatenursprungs mit Hilfe der Potentiale elegant angeben:

$$M = \int_A^B [x t_y - y t_x] ds = -\operatorname{Re} \left[z\bar{z}\Phi'(z) + z\Psi(z) - \int \Psi(z) dz \right]_A^B. \quad (2.57)$$

2.4 Griffith-Riss

Für den Fall eines finiten Risses der Länge $2a$ in einer unendlich ausgedehnten Ebene unter uniaxialer Zugbelastung (vgl. Abbildung 2.6a) kann mit der komplexen Methode eine geschlossen-analytische Lösung angegeben werden. Dieser Fall, den man auch als Griffith-Riss bezeichnet, wird in vielen Standardwerken (z.B. Hahn [43], Sadd [75], Gross und Seelig [40]) behandelt und soll wegen seiner grundlegenden Bedeutung genau dargestellt werden.

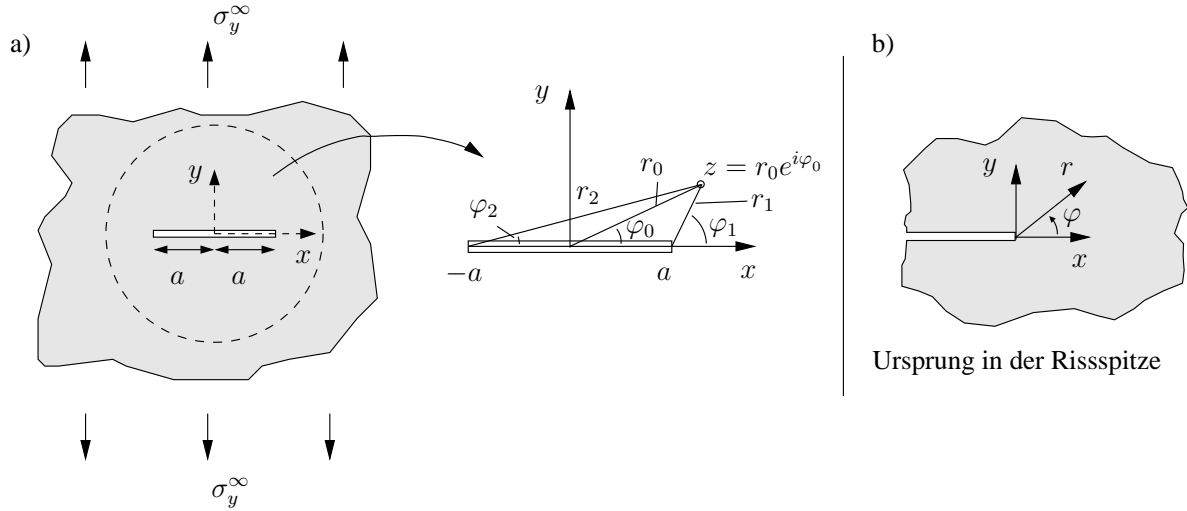


Abbildung 2.6: Griffith-Riss, Bipolarkoordinaten und Koordinatensystem im Ursprung der Risspitze

Unter Verwendung der komplexen Methode lauten die Potentiale für die geschlossen-analytische Lösung:

$$\Phi = \frac{\sigma_y^\infty}{4} \left(2\sqrt{z^2 - a^2} - z \right) \quad \text{und} \quad \Psi = \frac{\sigma_y^\infty}{2} \left(z - \frac{a^2}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right). \quad (2.58)$$

Mit den Kolosovschen Formeln (2.48) - (2.49) folgt für die Spannungen:

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_y^\infty \left[\frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} + \frac{\bar{z}}{\sqrt{\bar{z}^2 - a^2}} - 1 \right], \quad (2.59)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = a^2 \sigma_y^\infty \left[\frac{z - \bar{z}}{(z^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{a^2} \right]. \quad (2.60)$$

Führt man Bipolarkoordinaten r_i, φ_i ($i = 1, 2$) ein, die jeweils von den Rissenden aus zählen (vgl. Abbildung 2.6a), gelten die Beziehungen:

$$z = r_0 e^{i\varphi_0}, \quad z - a = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad z + a = r_2 e^{i\varphi_2}, \quad z^2 - a^2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \quad (2.61)$$

Damit können die Spannungen schließlich in der folgenden Weise angegeben werden:

$$\sigma_x = \sigma_y^\infty \left[\frac{r_0}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos \left(\varphi_0 - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right) - \frac{a^2 r_0}{(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}}} \sin(\varphi_0) \sin \left(\frac{3}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) \right) - 1 \right], \quad (2.62)$$

$$\sigma_y = \sigma_y^\infty \left[\frac{r_0}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos \left(\varphi_0 - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right) + \frac{a^2 r_0}{(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}}} \sin(\varphi_0) \sin \left(\frac{3}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) \right) \right], \quad (2.63)$$

$$\tau_{xy} = \sigma_y^\infty \frac{a^2 r_0}{(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}}} \sin(\varphi_0) \cos \left(\frac{3}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) \right). \quad (2.64)$$

Aus den Gleichungen (2.62) - (2.64) lassen sich durch eine Entwicklung um die (rechte) Rissspitze Näherungsdrücke herleiten. Die Koordinaten werden gemäß $r = r_1$, $\varphi = \varphi_1$ umbenannt (vgl. Abbildung 2.6b) und für $r_1 \ll a$ gilt dann näherungsweise:

$$r_0 = a + r \cos \varphi, \quad r_2 = 2a + r \cos \varphi, \quad \varphi_0 = \frac{r}{a} \sin \varphi, \quad \varphi_2 = \frac{r}{2a} \sin \varphi. \quad (2.65)$$

Bei Vernachlässigung von kleinen Termen höherer Ordnung erhält man in der unmittelbaren Umgebung der Rissspitze die nachstehenden Spannungen:

$$\sigma_x = \frac{\sigma_y^\infty \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \left(1 - \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \sin \left(\frac{3}{2}\varphi \right) \right) - \sigma_y^\infty, \quad (2.66)$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma_y^\infty \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \left(1 + \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \sin \left(\frac{3}{2}\varphi \right) \right), \quad (2.67)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_y^\infty \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cos \left(\frac{3}{2}\varphi \right). \quad (2.68)$$

Durch die hier angewendete Vorgehensweise bedingt, erkennt man unmittelbar, dass es sich bei den Ausdrücken (2.66) - (2.68) um die ersten Glieder von Reihenentwicklungen handelt, die alle das gleiche singuläre Verhalten $r^{-\frac{1}{2}}$ der Spannungen beschreiben. Der dabei eingeführte Faktor $\sigma_y^\infty \sqrt{\pi a}$ wird als *Spannungsintensitätsfaktor*, oder auch als *K-Faktor* bezeichnet. Er ist unabhängig von den Koordinaten r und φ und beschreibt die Intensität des Spannungsfeldes in Rissnähe, nicht aber dessen Verteilung. Seine Größe hängt lediglich von der Geometrie des Risses (Risslänge a) und, wie aufgrund der linearen Elastizitätstheorie zu erwarten, linear von den äußeren Belastungen (σ_y^∞) ab. Daher darf der Spannungsintensitätsfaktor als Maß für die Stärke des Rissspitzenfeldes angesehen werden.

Es ist bemerkenswert, dass die Überlagerung mit weiteren Spannungszuständen infolge äußerer Belastung lediglich das Hinzutreten von Gliedern bewirkt, die entweder den gleichen singulären Charakter besitzen, oder nichtsingulär sind. Betrachtet man etwa den Griffith-Riss im zweiachsigen Zugspannungsfeld $\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty$, was durch Superposition mit den Potentialen $\Phi = \sigma_x^\infty \frac{z}{4}$, $\Psi = -\sigma_x^\infty \frac{z}{2}$ beschrieben wird, dann ändert sich bei den Spannungen (2.66) - (2.68) lediglich der erste Ausdruck; dort entfällt dann der konstante Anteil

$-\sigma_y^\infty$ und man erhält die Spannungsfelder:

$$\sigma_x = \frac{\sigma_y^\infty \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left(1 - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{3}{2}\varphi\right)\right), \quad (2.69)$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma_y^\infty \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left(1 + \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{3}{2}\varphi\right)\right), \quad (2.70)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_y^\infty \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{3}{2}\varphi\right), \quad (2.71)$$

bzw. nach einer einfachen Transformation in Polarkoordinaten:

$$\sigma_r = \frac{\sigma_y^\infty \sqrt{\pi a}}{4\sqrt{2\pi r}} \left(5 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \cos\left(\frac{3}{2}\varphi\right)\right), \quad (2.72)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{\sigma_y^\infty \sqrt{\pi a}}{4\sqrt{2\pi r}} \left(3 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \cos\left(\frac{3}{2}\varphi\right)\right), \quad (2.73)$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{\sigma_y^\infty \sqrt{\pi a}}{4\sqrt{2\pi r}} \left(\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sin\left(\frac{3}{2}\varphi\right)\right). \quad (2.74)$$

Bei analoger Vorgehensweise folgen für die Verschiebungskomponenten die Näherungsausdrücke:

$$u_r = \frac{\sigma_y^\infty \sqrt{\pi a}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa - \cos(\varphi)) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right), \quad (2.75)$$

$$u_\varphi = \frac{\sigma_y^\infty \sqrt{\pi a}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa - \cos(\varphi)) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right). \quad (2.76)$$

Ausdrücklich sei darauf hingewiesen, dass die ermittelten Spannungs- und Verschiebungsfelder nur in unmittelbarer Umgebung (präziser ausgedrückt für $r \ll a$) der Rissspitze gültig sind. In hinreichend großem Abstand r dürfen höhere Terme nicht mehr vernachlässigt werden. Die Gültigkeit der ermittelten Felder besitzt aber auch nach unten bzw. innen Grenzen. Zum einen gibt es die sogenannte *Prozeßzone*, in welcher der komplexe Prozeß der Bindungslösung stattfindet. Dieser lässt sich mit den Mitteln der Kontinuumsmechanik im Allgemeinen allerdings nicht beschreiben. Zum anderen gibt es die sogenannte *plastische Zone*, in der es aufgrund der hohen Spannungen zu inelastischen Deformationen kommt. In der Tat treten in keinem realen Material singuläre (und damit unendlich hohe) Spannungen auf; diese sind eine formale Folge der mathematischen Idealisierung und stehen zudem im Widerspruch zur Annahme kleiner Verzerrungen. In vielen Fällen sind diese Zonen stark lokalisiert, z.B. für Metalle sowie die meisten spröden Materialien und dürfen dort vernachlässigt werden. Somit kann die Kontinuumsmechanik auf das gesamte rissbehaftete Gebiet angewendet werden und etwaige Prozesse innerhalb der Zonen werden indirekt durch die Nahfelder der linearen Elastizitätstheorie beschrieben.

Es lässt sich zeigen, dass die Nahfelder auch bei gekrümmten Rissspitzen sowie belasteten Rissufern von der gleichen Form sind und insbesondere die gleiche Singularitätsordnung $r^{-1/2}$ aufweisen. Deswegen ist die "Stärke" des Rissspitzenfeldes, wie bereits erwähnt,

durch die Spannungsintensitätsfaktoren charakterisiert, und diese sind die zentralen Bausteine verschiedener Bruchtheorien, wie z.B. der Irwinschen linear-elastischen Bruchmechanik. Für eine ausführliche Beschreibung sei auf das Lehrbuch von Gross und Seelig [40] verwiesen.

Im Zusammenhang mit dem Griffith-Riss sollen abschließend noch die drei grundlegenden Rissöffnungsarten erwähnt werden, die zur Unterscheidung der Deformation eines Risses dienen. Diese sind in Abbildung 2.7 dargestellt.

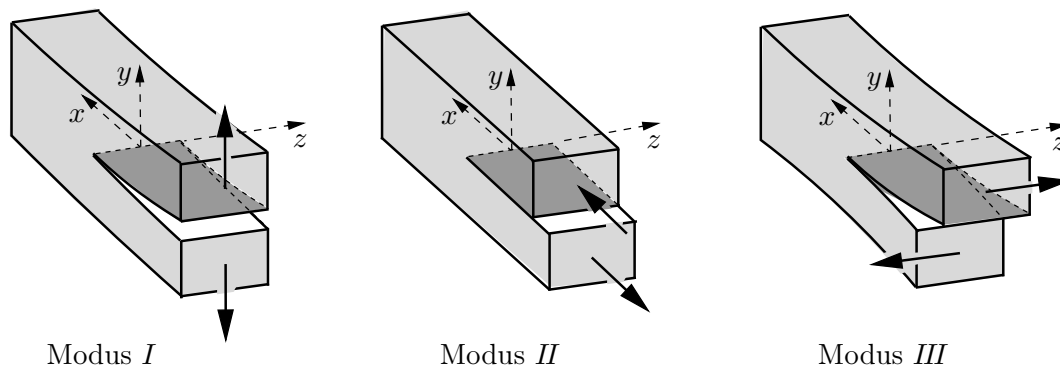


Abbildung 2.7: Rissöffnungsarten

- *Modus I* beschreibt eine zur x, z - Ebene symmetrische Rissöffnung. Er ist charakteristisch für Zugbelastungen, bei denen sich die Rissoberflächen bezüglich der Rissebene symmetrisch voneinander entfernen.
- Durch eine Relativverschiebung der Rissoberflächen in x - Richtung entsteht eine *Modus II* - Rissöffnung. Die Rissoberflächen gleiten aufeinander in der Rissebene in entgegengesetzter Richtung. Dieser Fall tritt bei ebenen Schubbelastungen bzw. antimetrischer Belastung der Rissränder auf.
- *Modus III* beschreibt eine Separation infolge von Relativverschiebungen in z - Richtung. Auch hier werden die Rissoberflächen in der Rissebene antimetrisch gegeneinander verschoben, allerdings quer zur Rissrichtung. Dieser Fall tritt bei Schub- und Torsionsproblemen auf und ist von geringerer praktischer Bedeutung.

Da *Modus III* von geringerer praktischer Bedeutung ist, wird er in der vorliegenden Arbeit nicht in Betracht gezogen.

Kapitel 3

Asymptotische Nahfeldanalysen mit der komplexen Methode

Das vorliegende Kapitel beschreibt die Modellierung, die für die späteren asymptotischen Nahfeldanalysen an ebenen Multi-Materialverbindungsstellen eingesetzt wird. Von vielen denkbaren Vorgehensweisen wird der Zugang über die in Abschnitt 2.3 vorgestellte komplexe Methode mit einem auf Theocaris [82] zurückgehenden Ansatz für die komplexen Potentiale gewählt. Die Potentiale bestehen aus einer Kombination von Potenzfunktionen, die sich dadurch auszeichnen, dass komplexwertige Exponenten explizit zugelassen werden. Zunächst werden verschiedene Übergangs- und Randbedingungen formuliert. Anschließend wird diskutiert, welchen Einfluss die Einschränkung auf reelle Exponenten nach sich zieht, wobei ein Zusammenhang zwischen den beiden Vorgehensweisen herausgearbeitet wird. Danach werden die aus den verwendeten Potentialen resultierenden Spannungs- und Verschiebungsfelder betrachtet und mit den Feldern der analytischen Lösung des Griffith-Risses (siehe Abschnitt 2.4) verglichen. Im darauf folgenden Abschnitt werden logarithmische Singularitäten diskutiert und im Rahmen der komplexen Methode behandelt. Hier wird demonstriert, dass das lineare Gleichungssystem für beliebige Multi-Materialkonfigurationen die gleiche Gestalt annimmt. In den letzten Abschnitten werden Dundurs-Parameter nach der Arbeit von Dundurs [26] vorgestellt sowie eine Zusammenfassung der Modellierung gegeben.

3.1 Übergangs- und Randbedingungen

Im Folgenden werden verschiedene Konfigurationen aus aneinander grenzenden, keilförmigen Scheiben betrachtet, die sich in einem Punkt O treffen (vgl. Abbildung 3.1a) und entlang ihrer Ränder ideal miteinander verbunden sind. Der Sonderfall einer Kerbe mit lastfreien Rändern und damit auch der Grenzfall eines Risses ist dabei zugelassen und wird ohne Einschränkung der Allgemeinheit in Abbildung 3.1b zwischen die Ränder Γ_0 und Γ_n gelegt. Die Sektoren sind homogen, linear-elastisch und unterscheiden sich untereinander durch ihre elastischen Materialeigenschaften E_i (Elastizitätsmodul) und ν_i (Querkontraktionszahl).

Da - wie sich später noch zeigen wird - die Spannungs- und Verschiebungsfelder unter anderem Ausdrücke der Art $r^{\lambda-1}$, $r^{\lambda-1} \ln(r)$, $\cos(\lambda \ln(r))$ enthalten, ist das Arbeiten mit

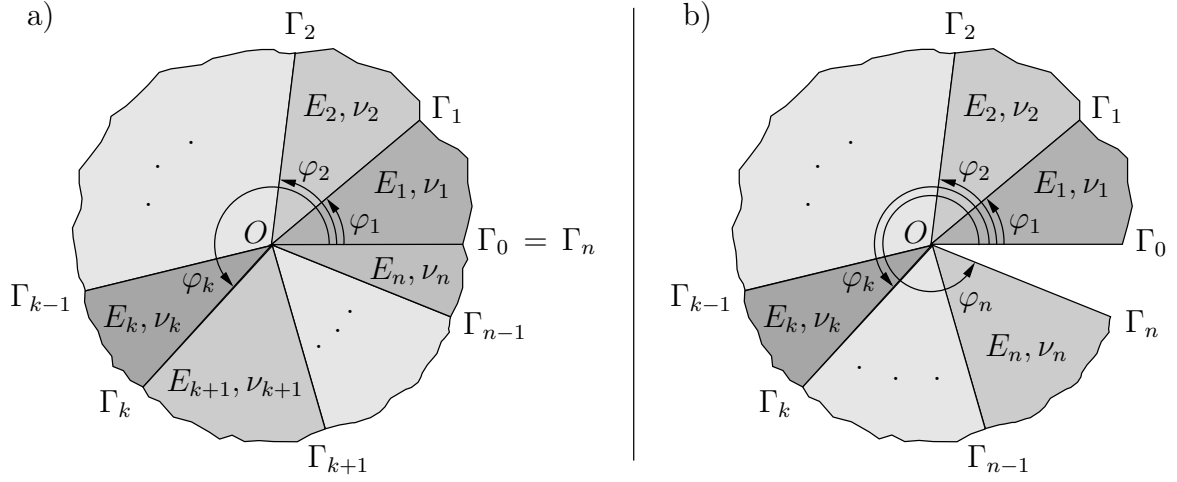


Abbildung 3.1: Multi-Materialkonfiguration ohne und mit Kerb

einer dimensionsbehafteten Größe z bzw. r als problematisch anzusehen. Entgegen der sonst üblichen Gepflogenheit dimensionsbehaftete Größen r, x, y zu verwenden, wird deswegen in dieser Arbeit bewusst mit einer entdimensionierten Variable z gearbeitet. Die Entdimensionierung wird durch

$$z = \frac{1}{L}(x + iy) \quad \text{bzw.} \quad z = \frac{r}{L}e^{i\varphi} \quad (3.1)$$

erreicht, wobei L eine willkürlich bestimmte Länge ist. In Abschnitt 3.4 wird eine Deutung dieser Größe L als charakteristische Länge der betrachteten Konfiguration gegeben. Im Folgenden wird an einigen Stellen abkürzend $\tilde{r} := \frac{r}{L}$ verwendet.

Am Interface Γ_k ($\varphi = \varphi_k$), an dem die beiden ideal verbundenen Sektoren k und $k+1$ aneinander grenzen, lauten die Übergangsbedingungen:

$$(\sigma_\varphi + i\tau_{r\varphi})_{\varphi=\varphi_k}^{(k)} = (\sigma_\varphi + i\tau_{r\varphi})_{\varphi=\varphi_k}^{(k+1)} \quad , \quad (u_r + iu_\varphi)_{\varphi=\varphi_k}^{(k)} = (u_r + iu_\varphi)_{\varphi=\varphi_k}^{(k+1)} . \quad (3.2)$$

Mit der Variablen $z_k = \frac{r}{L}e^{i\varphi_k}$ werden im weiteren Verlauf Punkte des Interfaces Γ_k beschrieben und mit tiefgestellten Indizes k bzw. $k+1$ bei den Potentialen und den Materialkonstanten die Zugehörigkeit zum entsprechenden Sektor angegeben.

Im Hinblick auf die später entstehenden Gleichungssysteme hat es sich bei den Spannungsübergangsbedingungen als zweckmäßig erwiesen, mit den Resultierenden (2.56) entlang des Interfaces $\varphi = \varphi_k$ zu arbeiten. In diesem Fall muss gefordert werden, dass die resultierenden Kräfte aus Sicht der angrenzenden Sektoren k und $k+1$ auf jedem Abschnitt von O bis $z_k = \frac{r}{L}e^{i\varphi_k}$ die Bedingung

$$F_x^{(k)} + iF_y^{(k)} = -(F_x^{(k+1)} + iF_y^{(k+1)}) \quad (3.3)$$

erfüllen. Unter Beachtung der zuvor eingeführten Konventionen (Orientierung eines Randkurvenstücks und Integrationsrichtung in (2.56)) entsteht die Forderung

$$\left[\Phi_k(z) + z\overline{\Phi_k'(z)} + \overline{\Psi_k(z)} \right]_{z=z_k}^{z=0} = - \left[\Phi_{k+1}(z) + z\overline{\Phi_{k+1}'(z)} + \overline{\Psi_{k+1}(z)} \right]_{z=0}^{z=z_k} , \quad (3.4)$$

die für beliebiges $z_k \in \Gamma_k$ erfüllt sein muss. Damit können die Übergangsbedingungen in

der Form

$$\left[\Phi_k(z) + z \overline{\Phi'_k(z)} + \overline{\Psi_k(z)} \right]_{z=0}^{z=z_k} = \left[\Phi_{k+1}(z) + z \overline{\Phi'_{k+1}(z)} + \overline{\Psi_{k+1}(z)} \right]_{z=0}^{z=z_k}, \quad (3.5)$$

$$\frac{1}{\mu_k} \left[\kappa_k \Phi_k(z_k) - z_k \overline{\Phi'_k(z_k)} - \overline{\Psi_k(z_k)} \right] = \frac{1}{\mu_{k+1}} \left[\kappa_{k+1} \Phi_{k+1}(z_k) - z_k \overline{\Phi'_{k+1}(z_k)} - \overline{\Psi_{k+1}(z_k)} \right] \quad (3.6)$$

angegeben werden.

Wenn eine Kerbe oder ein Riss vorliegt, sind die Ränder Γ_0 ($\varphi = 0$) und Γ_n ($\varphi = \varphi_n$) lastfrei. In diesem Fall lauten die Randbedingungen:

$$\left[\Phi_1(z) + z \overline{\Phi'_1(z)} + \overline{\Psi_1(z)} \right]_{z=0}^{z=z_0} = 0, \quad \text{mit } z_0 \in \Gamma_0 \text{ beliebig}, \quad (3.7)$$

$$\left[\Phi_n(z) + z \overline{\Phi'_n(z)} + \overline{\Psi_n(z)} \right]_{z=0}^{z=z_n} = 0, \quad \text{mit } z_n \in \Gamma_n \text{ beliebig}. \quad (3.8)$$

Betrachtet man eine Konfiguration ohne Kerbe, wie in Abbildung 3.1a, muss unbedingt das Vorhandensein eines Verzweigungsschnittes berücksichtigt werden, da bei Polardarstellungen in der komplexen Ebene das Argument φ nur bis auf Vielfache von 2π eindeutig bestimmt ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann dieser auf die positive reelle Achse gelegt werden, was sich häufig als zweckmäßig erweist. Dann muss beim Interface $\Gamma_0 = \Gamma_n$ aus Sicht des ersten Sektors $\varphi_0 = 0$ und aus Sicht des n -ten Sektors $\varphi_n = 2\pi$ gesetzt werden und mit $z_0 = \frac{r}{L} e^{i \cdot 0} = \frac{r}{L}$ und $z_n = \frac{r}{L} e^{2i\pi}$ folgt:

$$\left[\Phi_1(z) + z \overline{\Phi'_1(z)} + \overline{\Psi_1(z)} \right]_{z=0}^{z=z_0} = \left[\Phi_n(z) + z \overline{\Phi'_n(z)} + \overline{\Psi_n(z)} \right]_{z=0}^{z=z_n}, \quad (3.9)$$

$$\frac{1}{\mu_1} \left[\kappa_1 \Phi_1(z_0) - z_0 \overline{\Phi'_1(z_0)} - \overline{\Psi_1(z_0)} \right] = \frac{1}{\mu_n} \left[\kappa_n \Phi_n(z_n) - z_n \overline{\Phi'_n(z_n)} - \overline{\Psi_n(z_n)} \right]. \quad (3.10)$$

Die Notwendigkeit einen Verzweigungsschnitt zu berücksichtigen soll nicht streng mathematisch durch funktionentheoretische Argumentation begründet werden, sondern anhand eines einfachen, mechanisch-anschaulichen Beispiels verdeutlicht werden.

Betrachtet man eine Bimaterialkonfiguration, also den Fall $n = 2$ in Abbildung 3.1a, mit $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi_2 = 2\pi$, und setzt am Interface Γ_2 aus Sicht beider angrenzenden Materialien $\varphi_2 = 0$, dann entspricht das physikalisch dem Fall zweier Scheiben, die im ersten Quadranten übereinander liegen und an ihren Rändern ideal miteinander verbunden sind; das heisst es handelt sich um eine vollkommen andere Konfiguration.

Grundsätzlich sind weitere Fälle von Übergangs- oder Randbedingungen denkbar. Dempsey untersucht in den Arbeiten [23] und [25] beispielsweise auch eingespannte Ränder, oder Interfaces an denen $u_\varphi, \tau_{r\varphi}, \sigma_\varphi$ sogenannte "matched quantities" (also stetige Übergangsgrößen) sind und zugleich $\tau_{r\varphi} - \eta_j \sigma_\varphi = 0$ vorgeschrieben wird; dieser Fall wird als "no separation, slip in the presence of friction" interpretiert, wobei η_j ein Haftungskoeffizient ist. Für die Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit genügen jedoch die bisher zur Verfügung gestellten Gleichungen (3.5) - (3.10).

3.2 Potentiale mit komplexem Exponent

Um Singularitätsordnungen des Spannungsfeldes in der Umgebung des Punktes O zu ermitteln, werden nun geeignete Ansätze für die Potentiale, basierend auf der Arbeit von Theocaris [82], verwendet:

$$\Phi_k(z) = a_{1k} z^\lambda + a_{2k} z^{\bar{\lambda}} \quad , \quad \Psi_k(z) = b_{1k} z^\lambda + b_{2k} z^{\bar{\lambda}} \quad . \quad (3.11)$$

Die dabei auftretenden Konstanten a_{1k} , a_{2k} , b_{1k} , b_{2k} sowie der Exponent λ sind unbekannt und im Allgemeinen komplexwertig. Wie später in Abschnitt 3.4 gezeigt wird, ziehen die Potentiale ein Abklingverhalten der Spannungen vom Typ $\tilde{r}^{\text{Re}(\lambda)-1}$ nach sich. Daher erhält man eine untere Schranke für den Realteil von λ durch die Forderung, dass die Formänderungsenergie in der Umgebung der Sektorspitze beschränkt bleiben muss. Somit ist auch gewährleistet, dass die Verschiebungen an der Spitze nichtsingulär sind. Es folgt $\text{Re } \lambda > 0$ und da für $\text{Re } \lambda > 1$ offensichtlich beschränkte Spannungen für $z = 0$ resultieren, wird für alle folgenden Untersuchungen

$$0 < \text{Re } \lambda < 1 \quad (3.12)$$

vorausgesetzt.

Bei der Analyse einer Multi-Materialkonfiguration führen die Übergangs- und Randbedingungen auf ein lineares Gleichungssystem mit den Unbekannten a_{1k} , a_{2k} , b_{1k} , b_{2k} . Im Folgenden wird mit der Systematik und Notation von Theocaris demonstriert, welche Gestalt die Gleichungen bei Einsatz der Potentiale (3.11) annehmen. Führt man die Potentiale in die Übergangsbedingungen (3.5) und (3.6) ein, erhält man:

$$\begin{aligned} a_{1k} z_k^\lambda + a_{2k} z_k^{\bar{\lambda}} + z_k \left(\bar{a}_{1k} \bar{\lambda} \bar{z}_k^{\bar{\lambda}-1} + \bar{a}_{2k} \lambda \bar{z}_k^{\lambda-1} \right) + \bar{b}_{1k} \bar{z}_k^{\bar{\lambda}} + \bar{b}_{2k} \bar{z}_k^\lambda = \\ a_{1(k+1)} z_k^\lambda + a_{2(k+1)} z_k^{\bar{\lambda}} + z_k \left(\bar{a}_{1(k+1)} \bar{\lambda} \bar{z}_k^{\bar{\lambda}-1} + \bar{a}_{2(k+1)} \lambda \bar{z}_k^{\lambda-1} \right) + \bar{b}_{1(k+1)} \bar{z}_k^{\bar{\lambda}} + \bar{b}_{2(k+1)} \bar{z}_k^\lambda , \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \mu_{k+1} \left(\kappa_k \left(a_{1k} z_k^\lambda + a_{2k} z_k^{\bar{\lambda}} \right) - z_k \left(\bar{a}_{1k} \bar{\lambda} \bar{z}_k^{\bar{\lambda}-1} + \bar{a}_{2k} \lambda \bar{z}_k^{\lambda-1} \right) - \bar{b}_{1k} \bar{z}_k^{\bar{\lambda}} - \bar{b}_{2k} \bar{z}_k^\lambda \right) = \\ \mu_k \left(\kappa_{k+1} \left(a_{1(k+1)} z_k^\lambda + a_{2(k+1)} z_k^{\bar{\lambda}} \right) - z_k \left(\bar{a}_{1(k+1)} \bar{\lambda} \bar{z}_k^{\bar{\lambda}-1} + \bar{a}_{2(k+1)} \lambda \bar{z}_k^{\lambda-1} \right) \right. \\ \left. - \bar{b}_{1(k+1)} \bar{z}_k^{\bar{\lambda}} - \bar{b}_{2(k+1)} \bar{z}_k^\lambda \right) . \end{aligned} \quad (3.14)$$

Nun ist $z_k = \tilde{r} e^{i\varphi_k}$ und $\bar{z}_k = \tilde{r} e^{-i\varphi_k}$ und damit können die Gleichungen (3.13) und (3.14) nach einigen elementaren Umformungen in die folgende Gestalt gebracht werden:

$$\begin{aligned} \tilde{r}^\lambda \left[a_{1k} e^{i\lambda\varphi_k} + \bar{a}_{2k} \lambda e^{(2-\lambda)i\varphi_k} + \bar{b}_{2k} e^{-i\lambda\varphi_k} - a_{1(k+1)} e^{i\lambda\varphi_k} - \bar{a}_{2(k+1)} \lambda e^{(2-\lambda)i\varphi_k} - \bar{b}_{2(k+1)} e^{-i\lambda\varphi_k} \right] \\ + \tilde{r}^{\bar{\lambda}} \left[\bar{a}_{1k} \bar{\lambda} e^{i(2-\bar{\lambda})\varphi_k} + a_{2k} e^{i\bar{\lambda}\varphi_k} + \bar{b}_{1k} e^{-i\bar{\lambda}\varphi_k} - \bar{a}_{1(k+1)} \bar{\lambda} e^{i(2-\bar{\lambda})\varphi_k} - a_{2(k+1)} e^{i\bar{\lambda}\varphi_k} \right. \\ \left. - \bar{b}_{1(k+1)} e^{-i\bar{\lambda}\varphi_k} \right] = 0 , \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned}
& \tilde{r}^\lambda \left[\mu_k \left(\bar{a}_{2(k+1)} \lambda e^{i(2-\lambda)\varphi_k} + \bar{b}_{2(k+1)} e^{-i\lambda\varphi_k} - \kappa_{k+1} a_{1(k+1)} e^{i\lambda\varphi_k} \right) \right. \\
& \quad \left. + \mu_{k+1} \left(-\bar{a}_{2k} \lambda e^{i(2-\lambda)\varphi_k} - \bar{b}_{2k} e^{-i\lambda\varphi_k} + \kappa_k a_{1k} e^{i\lambda\varphi_k} \right) \right] \\
& + \tilde{r}^{\bar{\lambda}} \left[\mu_k \left(\bar{a}_{1(k+1)} \bar{\lambda} e^{i(2-\bar{\lambda})\varphi_k} + \bar{b}_{1(k+1)} e^{-i\bar{\lambda}\varphi_k} - \kappa_{k+1} a_{2(k+1)} e^{i\bar{\lambda}\varphi_k} \right) \right. \\
& \quad \left. + \mu_{k+1} \left(-\bar{a}_{1k} \bar{\lambda} e^{i(2-\bar{\lambda})\varphi_k} - \bar{b}_{1k} e^{-i\bar{\lambda}\varphi_k} + \kappa_k a_{2k} e^{i\bar{\lambda}\varphi_k} \right) \right] = 0 .
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Für beliebiges \tilde{r} sind diese Gleichungen nur dann erfüllt, wenn die eckigen Klammern bei \tilde{r}^λ und (zugleich) $\tilde{r}^{\bar{\lambda}}$ verschwinden. Nun werden die zu \tilde{r}^λ gehörenden Klammern mit $e^{i\lambda\varphi_k}$ erweitert und die zu $\tilde{r}^{\bar{\lambda}}$ gehörenden Klammern werden komplex konjugiert und mit $e^{-i\lambda\varphi_k}$ erweitert, so dass die Übergangsbedingungen schließlich die folgende Form annehmen:

$$a_{1k} e^{2i\lambda\varphi_k} + \bar{a}_{2k} \lambda e^{2i\varphi_k} + \bar{b}_{2k} = a_{1(k+1)} e^{2i\lambda\varphi_k} + \bar{a}_{2(k+1)} \lambda e^{2i\varphi_k} + \bar{b}_{2(k+1)} , \tag{3.17}$$

$$\bar{a}_{2k} e^{-2i\lambda\varphi_k} + a_{1k} \lambda e^{-2i\varphi_k} + b_{1k} = \bar{a}_{2(k+1)} e^{-2i\lambda\varphi_k} + a_{1(k+1)} \lambda e^{-2i\varphi_k} + b_{1(k+1)} , \tag{3.18}$$

$$\frac{\mu_k}{\mu_{k+1}} \left(\bar{a}_{2(k+1)} \lambda e^{2i\varphi_k} + \bar{b}_{2(k+1)} - \kappa_{k+1} a_{1(k+1)} e^{2i\lambda\varphi_k} \right) = \left(\bar{a}_{2k} \lambda e^{2i\varphi_k} + \bar{b}_{2k} - \kappa_k a_{1k} e^{2i\lambda\varphi_k} \right) , \tag{3.19}$$

$$\frac{\mu_k}{\mu_{k+1}} \left(a_{1(k+1)} \lambda e^{-2i\varphi_k} + b_{1(k+1)} - \kappa_{k+1} \bar{a}_{2(k+1)} e^{-2i\lambda\varphi_k} \right) = \left(a_{1k} \lambda e^{-2i\varphi_k} + b_{1k} - \kappa_k \bar{a}_{2k} e^{-2i\lambda\varphi_k} \right) . \tag{3.20}$$

Diese auf Theocaris zurückgehende Vorgehensweise, bei der aus einer mechanischen Bedingung unter Einsatz der Potentiale (3.11) zwei Gleichungen gewonnen werden, soll noch einmal gebündelt zusammengefasst werden:

- Potentiale (3.11) in die mechanische Bedingung (z.B. (3.5)) einsetzen
- Auf die Gestalt $\tilde{r}^\lambda[\dots] + \tilde{r}^{\bar{\lambda}}[\dots] = 0$ bringen
- Zwei Gleichungen gewinnen, da beide eckigen Klammern verschwinden müssen
- Die zweite der beiden Gleichungen nicht in der vorliegenden Form verwenden, sondern noch komplex konjugieren

Dieses Vorgehen wird insbesondere im folgenden Abschnitt 3.3 von Bedeutung sein und soll daher abkürzend als *komplexes Vorgehen* bezeichnet werden; *komplex* wegen $\lambda \in \mathbb{C}$. Anmerkung: Die beim Übergang (3.15) \rightsquigarrow (3.17) / (3.18) bzw. (3.16) \rightsquigarrow (3.19) / (3.20) vorgenommenen Erweiterungen der Gleichungen mit $e^{i\lambda\varphi_k}$ bzw. $e^{-i\lambda\varphi_k}$ dienen lediglich der Vereinfachung und werden daher in der Zusammenfassung nicht berücksichtigt.

Bei einer Kerbe oder einem Riss mit lastfreien Rändern Γ_0 und Γ_n erhält man aus (3.7) und (3.8) bei analoger Vorgehensweise die Gleichungen

$$a_{11} + \bar{a}_{21} \lambda + \bar{b}_{21} = 0 , \tag{3.21}$$

$$a_{11} \lambda + \bar{a}_{21} + b_{11} = 0 , \tag{3.22}$$

$$a_{1n} e^{2i\lambda\varphi_n} + \bar{a}_{2n} \lambda e^{2i\varphi_n} + \bar{b}_{2n} = 0 , \tag{3.23}$$

$$a_{1n} \lambda e^{-2i\varphi_n} + \bar{a}_{2n} e^{-2i\lambda\varphi_n} + b_{1n} = 0 . \tag{3.24}$$

Zuletzt soll noch der eher akademische Fall eines eingespannten Randes Γ_k angegeben werden. Aus $u_r + i u_\varphi = 0$ ($\forall z \in \Gamma_k$) resultieren die Gleichungen:

$$(\kappa_k a_{1k} e^{2i\lambda\varphi_k} - \bar{a}_{2k} \lambda e^{2i\varphi_k} - \bar{b}_{2k}) = 0, \quad (3.25)$$

$$(\kappa_k \bar{a}_{2k} e^{-2i\lambda\varphi_k} - a_{1k} \lambda e^{-2i\varphi_k} - b_{1k}) = 0. \quad (3.26)$$

Die Berücksichtigung eines Verzweigungsschnittes auf der positiven reellen Achse zieht nach sich, dass die Gleichungen (3.17) - (3.20) nur für $k = 1, 2, \dots, n-1$ die korrekten Übergangsbedingungen darstellen. Beim Interface Γ_n muss aus Sicht des ersten Sektors $\varphi_0 = 0$ und aus Sicht des n -ten Sektors $\varphi_n = 2\pi$ gesetzt werden. Analog zur vorigen Vorgehensweise folgen die Übergangsbedingungen am Interface Γ_n :

$$a_{11} + \bar{a}_{21} \lambda + \bar{b}_{21} = a_{1n} e^{2i\lambda\pi} + \bar{a}_{2n} \lambda e^{-2i\lambda\pi} + \bar{b}_{2n} e^{-2i\lambda\pi}, \quad (3.27)$$

$$a_{11} \lambda + \bar{a}_{21} + b_{11} = a_{1n} \lambda e^{2i\lambda\pi} + \bar{a}_{2n} e^{-2i\lambda\pi} + b_{1n} e^{2i\lambda\pi}, \quad (3.28)$$

$$\mu_n \left(\kappa_1 a_{11} - \bar{a}_{21} \lambda - \bar{b}_{21} \right) = \mu_1 \left(\kappa_n a_{1n} e^{2i\lambda\pi} - \bar{a}_{2n} \lambda e^{-2i\lambda\pi} - \bar{b}_{2n} e^{-2i\lambda\pi} \right), \quad (3.29)$$

$$\mu_n \left(\kappa_1 \bar{a}_{21} - a_{11} \lambda - b_{11} \right) = \mu_1 \left(\kappa_n \bar{a}_{2n} e^{-2i\lambda\pi} - a_{1n} \lambda e^{2i\lambda\pi} - b_{1n} e^{2i\lambda\pi} \right). \quad (3.30)$$

An dieser Stelle sei angemerkt, dass die Berücksichtigung eines Verzweigungsschnittes in der Arbeit von Theocaris [82] nicht erwähnt bzw. explizit vorgenommen wird. Jedoch resultiert daraus in den dort angeführten Beispielen kein Fehler, da nur einfache Konfigurationen betrachtet werden, wie etwa der klassische Bimaterialriss, wobei das Verbindungsinterface durch $\varphi = 0$ und die Rissufer durch $\varphi = \pi$ bzw. $\varphi = -\pi$ definiert werden. Man kann davon sprechen, dass die Berücksichtigung eines Verzweigungsschnittes auf diese Weise implizit erfolgt.

Im Grunde genommen liegt schon durch den bloßen Einsatz der Potentiale (3.11) eine Mehrdeutigkeit vor, die erst durch den Bezug auf einen Verzweigungsschnitt eindeutig wird. Das liegt daran, dass die allgemeine Potenz a^b im Komplexen (also für $a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$) durch $a^b := e^{b \ln a}$ definiert ist und daher vom betrachteten Zweig des komplexen Logarithmus abhängt. Nach Angabe eines Verzweigungsschnittes $\varphi = \varphi_0$ gilt für diesen:

$$\ln z := \ln |z| + i \operatorname{Arg}(z) \quad \text{mit} \quad \varphi_0 < \operatorname{Arg}(z) \leq \varphi_0 + 2\pi.$$

Der speziell durch $\varphi_0 = -\pi$ bestimmte Zweig wird *Hauptwert des Logarithmus* genannt und gemeinhin mit Ln bezeichnet:

$$\operatorname{Ln} z := \ln |z| + i \operatorname{Arg}(z) \quad \text{mit} \quad -\pi < \operatorname{Arg}(z) \leq \pi.$$

Deswegen ist die allgemeine Potenz a^b ohne Hinweis auf einen Verzweigungsschnitt nur als Menge komplexer Zahlen $a^b = \{e^{b(\operatorname{Ln} a + 2ik\pi)}; k = 0, \pm 1, \dots\}$ zu verstehen. Ausführliche Darstellungen hierzu finden sich in Lehrbüchern zur Funktionentheorie, wie z.B. von Martensen [59] oder Jänich [48].

Zur Analyse einer Multi-Materialkonfiguration im Hinblick auf Singularitätsordnungen werden die zuvor aus den Übergangs- und Randbedingungen entwickelten Gleichungen zu einem linearen, homogenen Gleichungssystem $\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$ zusammengestellt. Dabei ist die

Matrix \mathbf{B} eine Funktion des Exponenten λ , der Geometrie sowie der Materialeigenschaften und der Vektor \mathbf{a} enthält die Unbekannten:

$$\mathbf{a} = [\dots a_{1k} \bar{a}_{2k} b_{1k} \bar{b}_{2k} a_{1(k+1)} \bar{a}_{2(k+1)} b_{1(k+1)} \bar{b}_{2(k+1)} \dots]^T.$$

Im Falle einer Multi-Materialverbindungsstelle, die aus n perfekt miteinander verbundenen Sektoren besteht, erhält man auf diese Weise ein lineares Gleichungssystem $\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$ von $4n$ Gleichungen für die $4n$ Unbekannten $a_{1k}, \bar{a}_{2k}, b_{1k}, \bar{b}_{2k}$ ($k = 1, \dots, n$). Notwendig für nichttriviale Lösungen dieses Gleichungssystems ist das Verschwinden der Koeffizientendeterminante des Gleichungssystems $\det(\mathbf{B}) = 0$ und aus dieser *charakteristischen Gleichung* ergeben sich schließlich die "Eigenwerte" λ . Streng genommen handelt es sich nicht um Eigenwerte, sondern um Nullstellen oder Wurzeln λ des charakteristischen Polynoms, jedoch ist die Bezeichnung Eigenwerte gemeinhin üblich, deshalb wird sie auch in dieser Arbeit verwendet. Die zu den Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ gehörenden Potentiale (3.11) werden als Eigenfunktionen bezeichnet und aufgrund der Linearität können diese dann (beliebig) superponiert werden:

$$\Phi_k = \Phi_k|_{\lambda_1} + \Phi_k|_{\lambda_2} + \Phi_k|_{\lambda_3} + \dots, \quad \Psi_k = \Psi_k|_{\lambda_1} + \Psi_k|_{\lambda_2} + \Psi_k|_{\lambda_3} + \dots.$$

3.3 Potentiale mit reellem Exponent

Bei der asymptotischen Nahfeldanalyse kann es hinreichend sein mit reellen Potential-exponenten λ zu arbeiten, wie etwa im Falle des homogenen Spitzkerb, vgl. Gross und Seelig [40]. Wie im Abschnitt zuvor erläutert, führt der Satz von Übergangs- und Randbedingungen bei Multi-Materialkonfigurationen auf ein lineares Gleichungssystem. In diesem Abschnitt wird untersucht, welche Auswirkungen auf das lineare Gleichungssystem durch die a priori getroffene Einschränkung $\lambda \in \mathbb{R}$ resultieren.

Wenn λ von vornherein als reelle Zahl angenommen wird, führt dies zu Potentialen von der Gestalt:

$$\Phi_k(z) = a_k z^\lambda, \quad \Psi_k(z) = b_k z^\lambda, \quad a_k, b_k \in \mathbb{C} \quad \text{und} \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (3.31)$$

Zunächst werden die Übergangsbedingungen am (perfekt verbundenen) Interface Γ_k mit diesen Potentialen formuliert und mit den entsprechenden Gleichungen aus Abschnitt 3.1 verglichen. Führt man (3.31) unter Beachtung von $\lambda \in \mathbb{R}$ in die Übergangsbedingungen (3.5) und (3.6) ein, folgt:

$$a_k z_k^\lambda + z_k \bar{a}_k \lambda \bar{z}_k^{\lambda-1} + \bar{b}_k \bar{z}_k^\lambda = a_{k+1} z_k^\lambda + z_k \bar{a}_{k+1} \lambda \bar{z}_k^{\lambda-1} + \bar{b}_{k+1} \bar{z}_k^\lambda, \quad (3.32)$$

$$\mu_{k+1} (\kappa_k a_k z_k^\lambda - z_k \bar{a}_k \lambda \bar{z}_k^{\lambda-1} - \bar{b}_k \bar{z}_k^\lambda) = \mu_k (\kappa_{k+1} a_{k+1} z_k^\lambda - z_k \bar{a}_{k+1} \lambda \bar{z}_k^{\lambda-1} - \bar{b}_{k+1} \bar{z}_k^\lambda). \quad (3.33)$$

Aus Gleichung (3.32) lassen sich zwei Beziehungen gewinnen. Die erste Gleichung folgt direkt durch Substitution $z_k = \tilde{r} e^{i\varphi_k}$ und Abspalten von \tilde{r}^λ ; die zweite Gleichung ergibt sich durch komplexe Konjugation der ersten Gleichung. Erweitert man schließlich noch die erste Gleichung mit $e^{i\lambda\varphi_k}$ und die zweite Gleichung mit $e^{-i\lambda\varphi_k}$, resultieren:

$$a_k e^{2i\lambda\varphi_k} + \bar{a}_k \lambda e^{2i\varphi_k} + \bar{b}_k = a_{k+1} e^{2i\lambda\varphi_k} + \bar{a}_{k+1} \lambda e^{2i\varphi_k} + \bar{b}_{k+1}, \quad (3.34)$$

$$\bar{a}_k e^{-2i\lambda\varphi_k} + a_k \lambda e^{-2i\varphi_k} + b_k = \bar{a}_{k+1} e^{-2i\lambda\varphi_k} + a_{k+1} \lambda e^{-2i\varphi_k} + b_{k+1}. \quad (3.35)$$

Aus Gleichung (3.33) lassen sich auf vollkommen analoge Weise die beiden folgenden Beziehungen gewinnen:

$$(\kappa_k a_k e^{2i\lambda\varphi_k} - \bar{a}_k \lambda e^{2i\varphi_k} - \bar{b}_k) = \frac{\mu_k}{\mu_{k+1}} \left(\kappa_{k+1} a_{k+1} e^{2i\lambda\varphi_k} - \bar{a}_{k+1} \lambda e^{2i\varphi_k} - \bar{b}_{k+1} \right), \quad (3.36)$$

$$(\kappa_k \bar{a}_k e^{-2i\lambda\varphi_k} - a_k \lambda e^{-2i\varphi_k} - b_k) = \frac{\mu_k}{\mu_{k+1}} \left(\kappa_{k+1} \bar{a}_{k+1} e^{-2i\lambda\varphi_k} - a_{k+1} \lambda e^{-2i\varphi_k} - b_{k+1} \right). \quad (3.37)$$

Vergleicht man die hier für $\lambda \in \mathbb{R}$ aufgestellten Übergangsbedingungen (3.34) - (3.37) mit den Übergangsbedingungen (3.17) - (3.20), wie sie für $\lambda \in \mathbb{C}$ resultieren, erkennt man, dass die gleiche Struktur vorliegt. Man muss lediglich für alle k die Variablen \bar{a}_{1k} bzw. \bar{b}_{2k} durch \bar{a}_k bzw. \bar{b}_k ersetzen. Auf diesen Umstand weist bereits Theocaris in seiner Arbeit [82] hin.

Diese Vorgehensweise, bei der aus einer mechanischen Bedingung unter Einsatz der Potentiale (3.31) zwei Gleichungen gewonnen werden, soll auch hier zusammengefasst werden:

- Potentiale (3.31) in die mechanische Bedingung (z.B. (3.5)) einsetzen
- Auf die Gestalt $\tilde{r}^\lambda[\dots] = 0$ bringen und \tilde{r}^λ abspalten \rightsquigarrow erste Gleichung
- Die gewonnene Gleichung komplex konjugieren \rightsquigarrow zweite Gleichung

Dieses Vorgehen wird im Folgenden abkürzend als *reelles Vorgehen* bezeichnet; *reell* wegen $\lambda \in \mathbb{R}$. Anmerkung: Die Erweiterungen der Gleichungen mit $e^{i\lambda\varphi_k}$ bzw. $e^{-i\lambda\varphi_k}$ dienen lediglich der Vereinfachung und werden daher in der Zusammenfassung nicht berücksichtigt.

Dass die Gleichungen dieselben Strukturen aufweisen ist kein Zufall, dies gilt vielmehr für alle Arten von Übergangs- und Randbedingung, die mit Hilfe von Linearkombinationen aus den Kolosovschen Gleichungen (2.52) - (2.54), oder der resultierenden Kraftgrößen (2.56) formuliert werden. Den Einzelnachweis für alle denkbaren Übergangs- und Randbedingungen zu erbringen, dürfte schon daran scheitern, all diese Bedingungen zu formulieren; man denke etwa an so ungewöhnliche Fälle wie den in Abschnitt 3.1 angesprochenen Fall "no separation, slip in the presence of friction", den Dempsey in seiner Arbeit [23] untersuchte. Stattdessen soll ein systematischer Nachweis erbracht werden, der zunächst einige Vorüberlegungen benötigt. In den angesprochenen Gleichungen, die zur Formulierung für Übergangs- und Randbedingungen in Frage kommen, treten die Potentiale ausschließlich linear als "Ausdrücke vom Typ" Φ , Φ' , $\bar{\Phi}'$, $z\bar{\Phi}'$, $z\Phi''$, $\bar{\Psi}$, $\frac{z}{z}\Psi'$ auf. Bei Übergangs- oder Randbedingungen sind auch Forderungen wie zum Beispiel $u_\varphi = 0$ denkbar, also Forderungen, für deren Formulierung der Realteil oder Imaginärteil von (2.52) - (2.54) oder (2.56) gebildet werden muss. Daher ist es ferner notwendig auch die konjugierten Potentialausdrücke in Betracht zu ziehen.

Zum Beweis der Behauptung genügt es nach diesen Vorüberlegungen zu untersuchen, welchen Beitrag ein Potentialausdruck der Art Θ , $\bar{\Theta}$, Θ' , $\bar{\Theta}'$, $z\bar{\Theta}'$, $\bar{z}\Theta'$, $z\Theta''$, $\bar{z}\bar{\Theta}''$, $\frac{z}{z}\Theta'$, $\frac{\bar{z}}{\bar{z}}\bar{\Theta}'$ im k -ten Sektor zum linearen Gleichungssystem $\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$ bei Verwendung der Potentiale (3.11), bzw. zum System $\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$ bei Verwendung der Potentiale (3.31) liefert. Dabei wird im Falle der Potentiale (3.11) das *komplexe Vorgehen* aus Abschnitt 3.2 angewendet,

mit dem aus jeder Übergangs- oder Randbedingung zwei Gleichungen gewonnen werden (vgl. Übergang (3.15) \rightsquigarrow (3.17) / (3.18)) und im Falle der Potentiale (3.31) das zuvor beschriebene *reelle Vorgehen* (vgl. Übergang (3.32) \rightsquigarrow (3.34) / (3.35)). Setzt man die Potentiale $\Theta = c_{1k}z^\lambda + c_{2k}\bar{z}^\lambda$ im komplexen bzw. $\Theta = \tilde{c}_k z^\lambda$ im reellen Fall in die angesprochenen Ausdruckstypen ein, erhält man nach der jeweiligen Vorgehensweise folgende Beiträge zur Übergangs- oder Randbedingung:

	$\lambda \in \mathbb{C}$		$\lambda \in \mathbb{R}$	
	Gleichung 1	Gleichung 2	Gleichung 1	Gleichung 2
Θ	$c_{1k}z^\lambda$	$\bar{c}_{2k}\bar{z}^\lambda$	$\tilde{c}_k z^\lambda$	$\bar{\tilde{c}}_k \bar{z}^\lambda$
$\bar{\Theta}$	$\bar{c}_{2k}\bar{z}^\lambda$	$c_{1k}z^\lambda$	$\bar{\tilde{c}}_k \bar{z}^\lambda$	$\tilde{c}_k z^\lambda$
Θ'	$c_{1k}\lambda z^{\lambda-1}$	$\bar{c}_{2k}\lambda \bar{z}^{\lambda-1}$	$\tilde{c}_k \lambda z^{\lambda-1}$	$\bar{\tilde{c}}_k \lambda \bar{z}^{\lambda-1}$
$\bar{\Theta}'$	$\bar{c}_{2k}\lambda \bar{z}^{\lambda-1}$	$c_{1k}\lambda z^{\lambda-1}$	$\bar{\tilde{c}}_k \lambda \bar{z}^{\lambda-1}$	$\tilde{c}_k \lambda z^{\lambda-1}$
$z\bar{\Theta}'$	$\bar{c}_{2k}\lambda z\bar{z}^{\lambda-1}$	$c_{1k}\lambda \bar{z}z^{\lambda-1}$	$\bar{\tilde{c}}_k \lambda z\bar{z}^{\lambda-1}$	$\tilde{c}_k \lambda \bar{z}z^{\lambda-1}$
$\bar{z}\Theta'$	$c_{1k}\lambda \bar{z}z^{\lambda-1}$	$\bar{c}_{2k}\lambda z\bar{z}^{\lambda-1}$	$\tilde{c}_k \lambda \bar{z}z^{\lambda-1}$	$\bar{\tilde{c}}_k \lambda z\bar{z}^{\lambda-1}$
$\frac{z}{\bar{z}}\Theta'$	$c_{1k}\lambda z^\lambda \bar{z}^{-1}$	$\bar{c}_{2k}\lambda \bar{z}^\lambda z^{-1}$	$\tilde{c}_k \lambda z^\lambda \bar{z}^{-1}$	$\bar{\tilde{c}}_k \lambda \bar{z}^\lambda z^{-1}$
$\frac{\bar{z}}{z}\bar{\Theta}'$	$\bar{c}_{2k}\lambda \bar{z}^\lambda z^{-1}$	$c_{1k}\lambda z^\lambda \bar{z}^{-1}$	$\bar{\tilde{c}}_k \lambda \bar{z}^\lambda z^{-1}$	$\tilde{c}_k \lambda z^\lambda \bar{z}^{-1}$
$z\Theta''$	$c_{1k}\lambda(\lambda-1)z^{\lambda-1}$	$\bar{c}_{2k}\lambda(\lambda-1)\bar{z}^{\lambda-1}$	$\tilde{c}_k \lambda(\lambda-1)z^{\lambda-1}$	$\bar{\tilde{c}}_k \lambda(\lambda-1)\bar{z}^{\lambda-1}$
$\bar{z}\bar{\Theta}''$	$\bar{c}_{2k}\lambda(\lambda-1)\bar{z}^{\lambda-1}$	$c_{1k}\lambda(\lambda-1)z^{\lambda-1}$	$\bar{\tilde{c}}_k \lambda(\lambda-1)\bar{z}^{\lambda-1}$	$\tilde{c}_k \lambda(\lambda-1)z^{\lambda-1}$

Um die Übersichtlichkeit zu erhöhen, wurde dabei auf das Abspalten der Beträge \tilde{r} von z bzw. \bar{z} verzichtet. Zusätzlich anzumerken ist, dass z im hier betrachteten k -ten Sektor einen der Werte z_{k-1}, z_k annimmt, je nachdem welches Interface bzw. welcher Rand betrachtet wird. Werden nun zur Analyse einer Konfiguration sämtliche Übergangs- und Randbedingungen in gleicher Reihenfolge zu einem linearen, homogenen Gleichungssystem $\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$ im komplexen Fall bzw. $\tilde{\mathbf{B}} \cdot \tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$ im reellen Fall zusammengesetzt, folgt aufgrund voriger Gegenüberstellung direkt, dass $\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{B}}$ gelten muss, da es für die Koeffizientenmatrizen unerheblich ist, ob die Variablen $a_{1k}, \bar{a}_{2k}, b_{1k}, \bar{b}_{2k}$ oder $\tilde{a}_k, \bar{\tilde{a}}_k, \tilde{b}_k, \bar{\tilde{b}}_k$ zugrunde liegen. Damit ist der Beweis erbracht.

Nach Kenntnis des Autors ist ein solch allgemeingültiger Nachweis dieses Zusammenhangs bisher nicht bekannt. Es ist bemerkenswert, dass in beiden Fällen nichttriviale Lösungen des Gleichungssystems notwendigerweise auf die charakteristische Gleichung $\det(\mathbf{B}) = 0$ führen und damit die gleichen Werte für λ nach sich ziehen.

Auf die konkrete Angabe der Spannungs- und Verschiebungsfelder bei Multi-Materialverbindungsstellen wird oft verzichtet, was nicht zuletzt daran liegt, dass dort recht komplizierte bzw. längliche Ausdrücke entstehen. Stattdessen begnügt man sich meist mit der Ermittlung der Singularitätsordnung. Entsprechend voriger Überlegung ist zu diesem Zweck ein Ansatz der Art (3.31) mit reellem Exponent hinreichend. Soll dagegen auch die genaue Gestalt der entsprechenden Nahfelder ermittelt werden, muss neben dem Null-eigenwert λ auch der zugehörige Eigenvektor \mathbf{a} bestimmt und über die Potentiale in die Kolosovschen Gleichungen (2.52) - (2.54) eingesetzt werden. Wenn λ dabei a priori als reell angenommen, aber a posteriori als komplexer Wert in die Kolosovschen Gleichungen eingesetzt wird, erhält man unter Umständen falsche Ausdrücke für die Spannungen und Verschiebungen. Dies gilt insbesondere für Studien, in denen mit reellen Ansätzen (z.B.

Airyschen Spannungsfunktionen) gearbeitet wird. Auf diesen Umstand bzw. Mangel, der sich in vielen Veröffentlichungen findet, weist Theocaris schon 1974 in seiner Arbeit [82] hin. Eine vertiefende Diskussion wird in Abschnitt 3.7 geführt.

In der Regel wird man asymptotische Analysen nicht von Hand, sondern mit Rechnereinsatz durchführen. Wenn der Fall vorliegt, dass bei Verwendung der Potentiale (3.11) ein reeller Eigenwert λ mit zugehörigem Eigenvektor ermittelt wurde, ist zu beachten, dass zwei Interpretationsmöglichkeiten bestehen:

1. Wegen $\lambda \in \mathbb{R}$ hätte man hier von vornherein $a_{2k} = b_{2k} = 0$ setzen, also mit den Potentialen $\Phi_k = a_k z^\lambda$, $\Psi_k = b_k z^\lambda$ des *reellen Vorgehens* arbeiten können, und demgemäß liegt nicht der Eigenvektor $[\dots a_{1k} \bar{a}_{2k} b_{1k} \bar{b}_{2k} \dots]^T$, sondern vielmehr der Eigenvektor $[\dots a_k \bar{a}_k b_k \bar{b}_k \dots]^T$ vor.
2. Man nimmt an, dass der Eigenvektor $[\dots a_{1k} \bar{a}_{2k} b_{1k} \bar{b}_{2k} \dots]^T$ vorliegt und liest dann aus den Potentialen, die nun die Gestalt $\Phi_k = (a_{1k} + a_{2k})z^\lambda$ bzw. $\Psi_k = (b_{1k} + b_{2k})z^\lambda$ besitzen, ab, dass $a_{1k} = a_{2k}$ sowie $b_{1k} = b_{2k}$ für alle k gelten muss.

Diese beiden Interpretationsmöglichkeiten stellen keinen Widerspruch dar, da die Potentiale sich lediglich um den konstanten Faktor 2 unterscheiden.

3.4 Gestalt der Spannungen und Verschiebungen

Nun sollen die Spannungen und Verschiebungen, wie sie bei Verwendung der Potentiale (3.11) mit komplexem Exponent resultieren, etwas genauer betrachtet werden. Addiert man die Gleichungen (2.52) und (2.53) der (polaren) Kolosovschen Formeln, gelangt man zu einer etwas direkteren Darstellung der Spannungen:

$$\sigma_\varphi + i\tau_{r\varphi} = \left[\Phi'(z) + \overline{\Phi'(z)} + z\Phi''(z) + \Psi'(z)\frac{z}{\bar{z}} \right]. \quad (3.38)$$

Ausgehend von (3.38) gewinnt man die Spannungen σ_φ und $\tau_{r\varphi}$ durch Bildung des Realteils (beachte $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$) bzw. des Imaginärteils (beachte $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$):

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{2} \left(2 \left(\Phi'(z) + \overline{\Phi'(z)} \right) + z\Phi''(z) + \bar{z}\overline{\Phi''(z)} + \Psi'(z)\frac{z}{\bar{z}} + \overline{\Psi'(z)}\frac{\bar{z}}{z} \right), \quad (3.39)$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{1}{2i} \left(z\Phi''(z) - \bar{z}\overline{\Phi''(z)} + \Psi'(z)\frac{z}{\bar{z}} - \overline{\Psi'(z)}\frac{\bar{z}}{z} \right). \quad (3.40)$$

Die Radialspannung σ_r erhält man mithilfe der Gleichungen (2.52) und (3.39):

$$\sigma_r = \frac{1}{2} \left(2 \left(\Phi'(z) + \overline{\Phi'(z)} \right) - z\Phi''(z) - \bar{z}\overline{\Phi''(z)} - \Psi'(z)\frac{z}{\bar{z}} - \overline{\Psi'(z)}\frac{\bar{z}}{z} \right). \quad (3.41)$$

Für die Verschiebungen gilt schließlich:

$$u_r = \frac{1}{4\mu} e^{-i\varphi} \left(\kappa \left(\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} e^{2i\varphi} \right) - z\overline{\Phi'(z)} - \bar{z}\Phi'(z) e^{2i\varphi} - \overline{\Psi(z)} - \Psi(z) e^{2i\varphi} \right), \quad (3.42)$$

$$u_\varphi = \frac{1}{4i\mu} e^{-i\varphi} \left(\kappa \left(\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} e^{2i\varphi} \right) - z\overline{\Phi'(z)} + \bar{z}\Phi'(z) e^{2i\varphi} - \overline{\Psi(z)} + \Psi(z) e^{2i\varphi} \right). \quad (3.43)$$

Setzt man die Potentiale (3.11) in die Beziehungen (3.39) - (3.43) ein, erhält man nach einer Reihe von elementaren Umformungen die charakteristischen Nahfelder. Um die Lesbarkeit zu erhöhen, wird auf die Indizierung, die die Sektorzugehörigkeit kennzeichnet, verzichtet und die Potentiale werden in der Form $\Phi = Az^\lambda + Bz^{\bar{\lambda}}$, $\Psi = Cz^\lambda + Dz^{\bar{\lambda}}$ angegeben. Es resultieren:

$$\begin{aligned} \sigma_r = & \frac{\lambda}{2} \left(\frac{r}{L} \right)^{\lambda-1} \left[Ae^{i(\lambda-1)\varphi} (3-\lambda) + \bar{B}e^{i(1-\bar{\lambda})\varphi} (3-\lambda) - Ce^{i(1+\lambda)\varphi} - \bar{D}e^{-i(1+\bar{\lambda})\varphi} \right] \\ & + \frac{\bar{\lambda}}{2} \left(\frac{r}{L} \right)^{\bar{\lambda}-1} \left[\bar{A}e^{i(1-\bar{\lambda})\varphi} (3-\bar{\lambda}) + Be^{i(\bar{\lambda}-1)\varphi} (3-\bar{\lambda}) - \bar{C}e^{-i(1+\bar{\lambda})\varphi} - De^{i(1+\bar{\lambda})\varphi} \right], \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi = & \frac{\lambda}{2} \left(\frac{r}{L} \right)^{\lambda-1} \left[Ae^{i(\lambda-1)\varphi} (1+\lambda) + \bar{B}e^{i(1-\bar{\lambda})\varphi} (1+\lambda) + Ce^{i(1+\lambda)\varphi} + \bar{D}e^{-i(1+\bar{\lambda})\varphi} \right] \\ & + \frac{\bar{\lambda}}{2} \left(\frac{r}{L} \right)^{\bar{\lambda}-1} \left[\bar{A}e^{i(1-\bar{\lambda})\varphi} (1+\bar{\lambda}) + Be^{i(\bar{\lambda}-1)\varphi} (1+\bar{\lambda}) + \bar{C}e^{-i(1+\bar{\lambda})\varphi} + De^{i(1+\bar{\lambda})\varphi} \right], \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\varphi} = & \frac{\lambda}{2i} \left(\frac{r}{L} \right)^{\lambda-1} \left[Ae^{i(\lambda-1)\varphi} (\lambda-1) + \bar{B}e^{i(1-\bar{\lambda})\varphi} (1-\lambda) + Ce^{i(1+\lambda)\varphi} - \bar{D}e^{-i(1+\bar{\lambda})\varphi} \right] \\ & - \frac{\bar{\lambda}}{2i} \left(\frac{r}{L} \right)^{\bar{\lambda}-1} \left[\bar{A}e^{i(1-\bar{\lambda})\varphi} (\bar{\lambda}-1) + Be^{i(\bar{\lambda}-1)\varphi} (1-\bar{\lambda}) + \bar{C}e^{-i(1+\bar{\lambda})\varphi} - De^{i(1+\bar{\lambda})\varphi} \right], \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} u_r = & \frac{1}{4\mu} \left(\frac{r}{L} \right)^\lambda \left[Ae^{i(\lambda-1)\varphi} (\kappa-\lambda) + \bar{B}e^{i(1-\bar{\lambda})\varphi} (\kappa-\lambda) - Ce^{i(1+\lambda)\varphi} - \bar{D}e^{-i(1+\bar{\lambda})\varphi} \right] \\ & + \frac{1}{4\mu} \left(\frac{r}{L} \right)^{\bar{\lambda}} \left[\bar{A}e^{i(1-\bar{\lambda})\varphi} (\kappa-\bar{\lambda}) + Be^{i(\bar{\lambda}-1)\varphi} (\kappa-\bar{\lambda}) - \bar{C}e^{-i(1+\bar{\lambda})\varphi} - De^{i(1+\bar{\lambda})\varphi} \right], \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} u_\varphi = & -\frac{i}{4\mu} \left(\frac{r}{L} \right)^\lambda \left[Ae^{i(\lambda-1)\varphi} (\kappa+\lambda) - \bar{B}e^{i(1-\bar{\lambda})\varphi} (\kappa+\lambda) + Ce^{i(1+\lambda)\varphi} - \bar{D}e^{-i(1+\bar{\lambda})\varphi} \right] \\ & + \frac{i}{4\mu} \left(\frac{r}{L} \right)^{\bar{\lambda}} \left[\bar{A}e^{i(1-\bar{\lambda})\varphi} (\kappa+\bar{\lambda}) - Be^{i(\bar{\lambda}-1)\varphi} (\kappa+\bar{\lambda}) + \bar{C}e^{-i(1+\bar{\lambda})\varphi} - De^{i(1+\bar{\lambda})\varphi} \right]. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Zunächst stellt man fest, dass sämtliche Ausdrücke in eckigen Klammern unabhängig von r sind. Daher besitzen alle Spannungen das gleiche radiale Abklingverhalten von der Art der Vorfaktoren $\left(\frac{r}{L}\right)^{\lambda-1}$ bzw. $\left(\frac{r}{L}\right)^{\bar{\lambda}-1}$. Beachtet man, dass λ im Allgemeinen komplexwertig ist und setzt $\lambda = \lambda^{\text{Re}} + i\lambda^{\text{Im}}$, mit $\{\lambda^{\text{Re}}, \lambda^{\text{Im}}\} \in \mathbb{R}$, folgt für das Abklingverhalten:

$$\begin{aligned} \tilde{r}^{\lambda-1} &= \tilde{r}^{\lambda^{\text{Re}}-1+i\lambda^{\text{Im}}} = \tilde{r}^{\lambda^{\text{Re}}-1} e^{i\lambda^{\text{Im}} \ln \tilde{r}} = \tilde{r}^{\lambda^{\text{Re}}-1} [\cos(\lambda^{\text{Im}} \ln \tilde{r}) + i \sin(\lambda^{\text{Im}} \ln \tilde{r})], \\ \tilde{r}^{\bar{\lambda}-1} &= \tilde{r}^{\lambda_1-1-i\lambda^{\text{Im}}} = \tilde{r}^{\lambda^{\text{Re}}-1} e^{-i\lambda^{\text{Im}} \ln \tilde{r}} = \tilde{r}^{\lambda^{\text{Re}}-1} [\cos(\lambda^{\text{Im}} \ln \tilde{r}) - i \sin(\lambda^{\text{Im}} \ln \tilde{r})], \end{aligned}$$

wobei wieder die Abkürzung $\tilde{r} = \left(\frac{r}{L}\right)$ genutzt wurde.

Bei asymptotischen Nahfeldanalysen der Spannungen und Verschiebungen existieren typischerweise mehrere, oder gar unendlich viele Eigenwerte. Demgemäß müssen die Eigenfunktionen (3.44) - (3.48) für alle vorliegenden Eigenwert $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ ermittelt und zur

Nahfelddarstellung einfach superponiert werden. In vielen Arbeiten wird diese Superposition in der Form

$$\sigma_{ij}(r, \varphi) = K_1 r^{\lambda_1-1} f_{ij}^{(1)}(\varphi) + K_2 r^{\lambda_2-1} f_{ij}^{(2)}(\varphi) + K_3 r^{\lambda_3-1} f_{ij}^{(3)}(\varphi) + \dots, \quad K_k \in \mathbb{R} \quad (3.49)$$

notiert, was aber streng genommen nur für reelle Werte von λ korrekt ist. Wie man unmittelbar erkennt, würde ein Imaginärteil von λ in dieser Darstellung zu komplexwertigen Spannungen führen. Eigenwerte mit $\text{Im}(\lambda_k) \neq 0$ werden im Weiteren auch *echt* komplexe Eigenwerte genannt.

Für die Spannungen (3.44) - (3.46) lassen sich auch reelle Ausdrücke gewinnen. Dazu müssen zunächst die Größen λ, A, B, C, D in Real- und Imaginärteil zerlegt werden. Dies wird wie folgt notiert: $\lambda = \lambda^{\text{Re}} + i\lambda^{\text{Im}}, A = A^{\text{Re}} + iA^{\text{Im}}, B = B^{\text{Re}} + iB^{\text{Im}}, C = C^{\text{Re}} + iC^{\text{Im}}, D = D^{\text{Re}} + iD^{\text{Im}}$, mit $\{\lambda^{\text{Re}}, \lambda^{\text{Im}}, A^{\text{Re}}, A^{\text{Im}}, B^{\text{Re}}, B^{\text{Im}}, C^{\text{Re}}, C^{\text{Im}}, D^{\text{Re}}, D^{\text{Im}}\} \in \mathbb{R}$. Unter Beachtung von $\tilde{r} = r/L$, folgt dann für die Radialspannung nach einer Reihe elementarer und länglicher Umformungen:

$$\begin{aligned} \sigma_r = & \tilde{r}^{\lambda^{\text{Re}}-1} \cos(\lambda^{\text{Im}} \ln \tilde{r}) \left\{ e^{-\lambda^{\text{Im}} \varphi} \right. \\ & \cdot \left[\sin((\lambda^{\text{Re}} + 1) \varphi) \left(C^{\text{Im}} \lambda^{\text{Re}} + C^{\text{Re}} \lambda^{\text{Im}} + e^{2\varphi \lambda^{\text{Im}}} (D^{\text{Im}} \lambda^{\text{Re}} - D^{\text{Re}} \lambda^{\text{Im}}) \right) \right. \\ & + \cos((\lambda^{\text{Re}} + 1) \varphi) \left(C^{\text{Im}} \lambda^{\text{Im}} - C^{\text{Re}} \lambda^{\text{Re}} - e^{2\varphi \lambda^{\text{Im}}} (D^{\text{Re}} \lambda^{\text{Re}} + D^{\text{Im}} \lambda^{\text{Im}}) \right) \\ & + \cos((\lambda^{\text{Re}} - 1) \varphi) \left(A^{\text{Re}} (3\lambda^{\text{Re}} - (\lambda^{\text{Re}})^2 + (\lambda^{\text{Im}})^2) - \left(A^{\text{Im}} - e^{2\varphi \lambda^{\text{Im}}} B^{\text{Im}} \right) \right. \\ & \quad \cdot (3 - 2\lambda^{\text{Re}}) \lambda^{\text{Im}} + e^{2\varphi \lambda^{\text{Im}}} B^{\text{Re}} ((3 - \lambda^{\text{Re}}) \lambda^{\text{Re}} + (\lambda^{\text{Im}})^2) \Big) \\ & - \sin((\lambda^{\text{Re}} - 1) \varphi) \left(3A^{\text{Re}} \lambda^{\text{Im}} - 2A^{\text{Re}} \lambda^{\text{Re}} \lambda^{\text{Im}} + A^{\text{Im}} ((3 - \lambda^{\text{Re}}) \lambda^{\text{Re}} + (\lambda^{\text{Im}})^2) \right. \\ & \quad \left. \left. - e^{2\varphi \lambda^{\text{Im}}} (B^{\text{Re}} (3 - 2\lambda^{\text{Re}}) \lambda^{\text{Im}} - B^{\text{Im}} ((3 - \lambda^{\text{Re}}) \lambda^{\text{Re}} + (\lambda^{\text{Im}})^2)) \right) \right] \Big\} \\ & + \tilde{r}^{\lambda^{\text{Re}}-1} \sin(\lambda^{\text{Im}} \ln \tilde{r}) \left\{ e^{-\lambda^{\text{Im}} \varphi} \right. \\ & \cdot \left[\sin((\lambda^{\text{Re}} + 1) \varphi) \left(C^{\text{Im}} \lambda^{\text{Im}} - C^{\text{Re}} \lambda^{\text{Re}} + e^{2\varphi \lambda^{\text{Im}}} (D^{\text{Re}} \lambda^{\text{Re}} + D^{\text{Im}} \lambda^{\text{Im}}) \right) \right. \\ & - \cos((\lambda^{\text{Re}} + 1) \varphi) \left(C^{\text{Im}} \lambda^{\text{Re}} + C^{\text{Re}} \lambda^{\text{Im}} + e^{2\varphi \lambda^{\text{Im}}} (D^{\text{Re}} \lambda^{\text{Im}} - D^{\text{Im}} \lambda^{\text{Re}}) \right) \\ & - \sin((\lambda^{\text{Re}} - 1) \varphi) \left(A^{\text{Re}} (\lambda^{\text{Re}} + (\lambda^{\text{Re}})^2 - (\lambda^{\text{Im}})^2) - \left(A^{\text{Im}} + e^{2\varphi \lambda^{\text{Im}}} B^{\text{Im}} \right) (1 + 2\lambda^{\text{Re}}) \right. \\ & \quad \cdot \lambda^{\text{Im}} + e^{2\varphi \lambda^{\text{Im}}} B^{\text{Re}} ((\lambda^{\text{Im}})^2 - \lambda^{\text{Re}} (1 + \lambda^{\text{Re}})) \Big) \\ & - \cos((\lambda^{\text{Re}} - 1) \varphi) \left(A^{\text{Im}} (\lambda^{\text{Re}} + (\lambda^{\text{Re}})^2 - (\lambda^{\text{Im}})^2) + \left(A^{\text{Re}} + e^{2\varphi \lambda^{\text{Im}}} B^{\text{Re}} \right) (1 + 2\lambda^{\text{Re}}) \right. \\ & \quad \left. \left. \cdot \lambda^{\text{Im}} + e^{2\varphi \lambda^{\text{Im}}} B^{\text{Im}} ((\lambda^{\text{Im}})^2 - \lambda^{\text{Re}} (1 + \lambda^{\text{Re}})) \right) \right] \Big\}. \quad (3.50) \end{aligned}$$

Nun wird die Umfangsspannung (3.45) in reeller Form betrachtet.

$$\begin{aligned}
\sigma_\varphi = & \tilde{r}^{\lambda^{\text{Re}}-1} \cos(\lambda^{\text{Im}} \ln \tilde{r}) \left\{ e^{-\lambda^{\text{Im}} \varphi} \right. \\
& \cdot \left[\sin((\lambda^{\text{Re}} + 1) \varphi) \left(C^{\text{Im}} \lambda^{\text{Re}} + C^{\text{Re}} \lambda^{\text{Im}} + e^{2\varphi \lambda^{\text{Im}}} (D^{\text{Im}} \lambda^{\text{Re}} - D^{\text{Re}} \lambda^{\text{Im}}) \right) \right. \\
& + \cos((\lambda^{\text{Re}} + 1) \varphi) \left(C^{\text{Re}} \lambda^{\text{Re}} - C^{\text{Im}} \lambda^{\text{Im}} + e^{2\varphi \lambda^{\text{Im}}} (D^{\text{Re}} \lambda^{\text{Re}} + D^{\text{Im}} \lambda^{\text{Im}}) \right) \\
& + \cos((\lambda^{\text{Re}} - 1) \varphi) \left(A^{\text{Re}} (\lambda^{\text{Re}} + (\lambda^{\text{Re}})^2 - (\lambda^{\text{Im}})^2) - A^{\text{Im}} (1 + 2\lambda^{\text{Re}}) \lambda^{\text{Im}} \right. \\
& \quad \left. + e^{2\varphi \lambda^{\text{Im}}} (B^{\text{Im}} (1 + 2\lambda^{\text{Re}}) \lambda^{\text{Im}} + B^{\text{Re}} (\lambda^{\text{Re}} + (\lambda^{\text{Re}})^2 - (\lambda^{\text{Im}})^2)) \right) \\
& + \sin((\lambda^{\text{Re}} - 1) \varphi) \left(A^{\text{Re}} (1 + 2\lambda^{\text{Re}}) \lambda^{\text{Im}} + A^{\text{Im}} (\lambda^{\text{Re}} + (\lambda^{\text{Re}})^2 - (\lambda^{\text{Im}})^2) \right. \\
& \quad \left. + e^{2\varphi \lambda^{\text{Im}}} (-B^{\text{Re}} (1 + 2\lambda^{\text{Re}}) \lambda^{\text{Im}} + B^{\text{Im}} (\lambda^{\text{Re}} + (\lambda^{\text{Re}})^2 - (\lambda^{\text{Im}})^2)) \right) \left. \right] \Big\} \\
& + \tilde{r}^{\lambda^{\text{Re}}-1} \sin(\lambda^{\text{Im}} \ln \tilde{r}) \left\{ e^{-\lambda^{\text{Im}} \varphi} \right. \\
& \cdot \left[\sin((\lambda^{\text{Re}} + 1) \varphi) \left(C^{\text{Im}} \lambda^{\text{Im}} - C^{\text{Re}} \lambda^{\text{Re}} + e^{2\lambda^{\text{Im}} \varphi} (D^{\text{Re}} \lambda^{\text{Re}} + D^{\text{Im}} \lambda^{\text{Im}}) \right) \right. \\
& - \cos((\lambda^{\text{Re}} + 1) \varphi) \left(C^{\text{Im}} \lambda^{\text{Re}} + C^{\text{Re}} \lambda^{\text{Im}} + e^{2\lambda^{\text{Im}} \varphi} (D^{\text{Re}} \lambda^{\text{Im}} - D^{\text{Im}} \lambda^{\text{Re}}) \right) \\
& - \cos((\lambda^{\text{Re}} - 1) \varphi) \left(\left(A^{\text{Re}} + B^{\text{Re}} e^{2\lambda^{\text{Im}} \varphi} \right) (1 + 2\lambda^{\text{Re}}) \lambda^{\text{Im}} + (\lambda^{\text{Re}} + (\lambda^{\text{Re}})^2 - (\lambda^{\text{Im}})^2) \right. \\
& \quad \cdot A^{\text{Im}} + B^{\text{Im}} e^{2\lambda^{\text{Im}} \varphi} ((\lambda^{\text{Im}})^2 - \lambda^{\text{Re}} (1 + \lambda^{\text{Re}})) \Big) \\
& + \sin((\lambda^{\text{Re}} - 1) \varphi) \left(\left(A^{\text{Im}} + B^{\text{Im}} e^{2\lambda^{\text{Im}} \varphi} \right) (1 + 2\lambda^{\text{Re}}) \lambda^{\text{Im}} - (\lambda^{\text{Re}} + (\lambda^{\text{Re}})^2 - (\lambda^{\text{Im}})^2) \right. \\
& \quad \cdot A^{\text{Re}} + B^{\text{Re}} e^{2\lambda^{\text{Im}} \varphi} (\lambda^{\text{Re}} + (\lambda^{\text{Re}})^2 - (\lambda^{\text{Im}})^2) \Big) \left. \right] \Big\}. \tag{3.51}
\end{aligned}$$

Schließlich lautet die Schubspannung (3.46) in reeller Darstellung:

$$\begin{aligned}
\tau_{r\varphi} = & \tilde{r}^{\lambda^{\text{Re}}-1} \cos(\lambda^{\text{Im}} \ln \tilde{r}) \left\{ e^{-\lambda^{\text{Im}} \varphi} \right. \\
& \cdot \left[\cos((\lambda^{\text{Re}} + 1) \varphi) \left(C^{\text{Re}} \lambda^{\text{Re}} - C^{\text{Im}} \lambda^{\text{Im}} + e^{2\varphi \lambda^{\text{Im}}} (D^{\text{Re}} \lambda^{\text{Re}} + D^{\text{Im}} \lambda^{\text{Im}}) \right) \right. \\
& - \sin((\lambda^{\text{Re}} + 1) \varphi) \left(C^{\text{Im}} \lambda^{\text{Re}} + C^{\text{Re}} \lambda^{\text{Im}} + e^{2\varphi \lambda^{\text{Im}}} (D^{\text{Im}} \lambda^{\text{Re}} - D^{\text{Re}} \lambda^{\text{Im}}) \right) \\
& + \cos((\lambda^{\text{Re}} - 1) \varphi) \left(A^{\text{Re}} (\lambda^{\text{Re}} + (\lambda^{\text{Re}})^2 - (\lambda^{\text{Im}})^2) - A^{\text{Im}} (1 + 2\lambda^{\text{Re}}) \lambda^{\text{Im}} \right. \\
& \quad \left. + e^{2\varphi \lambda^{\text{Im}}} (B^{\text{Im}} (1 + 2\lambda^{\text{Re}}) \lambda^{\text{Im}} + B^{\text{Re}} (\lambda^{\text{Re}} + (\lambda^{\text{Re}})^2 - (\lambda^{\text{Im}})^2)) \right) \\
& - \sin((\lambda^{\text{Re}} - 1) \varphi) \left(A^{\text{Re}} (1 + 2\lambda^{\text{Re}}) \lambda^{\text{Im}} + A^{\text{Im}} (\lambda^{\text{Re}} + (\lambda^{\text{Re}})^2 - (\lambda^{\text{Im}})^2) \right. \\
& \quad \left. + e^{2\varphi \lambda^{\text{Im}}} (-B^{\text{Re}} (1 + 2\lambda^{\text{Re}}) \lambda^{\text{Im}} + B^{\text{Im}} (\lambda^{\text{Re}} + (\lambda^{\text{Re}})^2 - (\lambda^{\text{Im}})^2)) \right) \left. \right] \Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \tilde{r}^{\lambda^{\text{Re}}-1} \sin(\lambda^{\text{Im}} \ln \tilde{r}) \left\{ e^{-\lambda^{\text{Im}} \varphi} \right. \\
& \cdot \left[\sin((\lambda^{\text{Re}} + 1) \varphi) \left(-C^{\text{Re}} \lambda^{\text{Re}} + C^{\text{Im}} \lambda^{\text{Im}} + e^{2\varphi \lambda^{\text{Im}}} (D^{\text{Re}} \lambda^{\text{Re}} + D^{\text{Im}} \lambda^{\text{Im}}) \right) \right. \\
& - \cos((\lambda^{\text{Re}} + 1) \varphi) \left(C^{\text{Im}} \lambda^{\text{Re}} + C^{\text{Re}} \lambda^{\text{Im}} + e^{2\varphi \lambda^{\text{Im}}} (D^{\text{Re}} \lambda^{\text{Im}} - D^{\text{Im}} \lambda^{\text{Re}}) \right) \\
& + \sin((\lambda^{\text{Re}} - 1) \varphi) \left((A^{\text{Im}} + e^{2\varphi \lambda^{\text{Im}}} B^{\text{Im}}) (1 + 2\lambda^{\text{Re}}) \lambda^{\text{Im}} - (\lambda^{\text{Re}} + (\lambda^{\text{Re}})^2 - (\lambda^{\text{Im}})^2) \right. \\
& \quad \cdot A^{\text{Re}} + e^{2\varphi \lambda^{\text{Im}}} B^{\text{Re}} (\lambda^{\text{Re}} (1 + \lambda^{\text{Re}}) - (\lambda^{\text{Im}})^2) \Big) \\
& - \cos((\lambda^{\text{Re}} - 1) \varphi) \left((A^{\text{Re}} + e^{2\varphi \lambda^{\text{Im}}} B^{\text{Re}}) (1 + 2\lambda^{\text{Re}}) \lambda^{\text{Im}} + (\lambda^{\text{Re}} + (\lambda^{\text{Re}})^2 - (\lambda^{\text{Im}})^2) \right. \\
& \quad \cdot A^{\text{Im}} + e^{2\varphi \lambda^{\text{Im}}} B^{\text{Im}} (-\lambda^{\text{Re}} (1 + \lambda^{\text{Re}}) + (\lambda^{\text{Im}})^2) \Big) \Big] \Big\}. \quad (3.52)
\end{aligned}$$

Wie zuvor bereits erwähnt, liegt gewöhnlich eine Reihe von Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ vor. Aufgrund der Gestalt von (3.50) - (3.52) liest man ab, dass im Falle $\text{Im}(\lambda_k) \neq 0$ die korrekte Darstellung für die Superposition wie folgt lautet:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}(r, \varphi) = \sum_{k=1} \frac{K_k}{(r/L)^{1-\text{Re}(\lambda_k)}} & \left[\cos\left(\text{Im}(\lambda_k) \ln\left(\frac{r}{L}\right)\right) f_{ij_k}^{(\cos)}(\varphi) \right. \\
& \left. + \sin\left(\text{Im}(\lambda_k) \ln\left(\frac{r}{L}\right)\right) f_{ij_k}^{(\sin)}(\varphi) \right], \quad K_k \in \mathbb{R}. \quad (3.53)
\end{aligned}$$

Die Bedeutung der hierbei verwendeten Funktionen $f_{ij_k}^{(\cos)}(\varphi)$ und $f_{ij_k}^{(\sin)}(\varphi)$ ist leicht einzusehen. Betrachtet man etwa die Radialspannung (also $f_r^{(\cos)}(\varphi)$ und $f_r^{(\sin)}(\varphi)$), folgt, dass $f_r^{(\cos)}(\varphi)$ dem Inhalt der ersten geschweiften Klammern $\{ \}$ von Gleichung (3.50) entspricht. Da diese Klammer zum Faktor $\cos(\lambda^{\text{Im}} \ln \tilde{r})$ gehört, wurde bei der Funktion $f_r^{(\cos)}(\varphi)$ suggestiv der hochgestellte Index "(cos)" gewählt. Die Funktion $f_r^{(\sin)}(\varphi)$ entspricht dem Inhalt der zweiten geschweiften Klammer $\{ \}$ von (3.50).

Das Abklingverhalten der Spannungen (3.44) - (3.46) ist singular vom Typ $(\frac{r}{L})^{\text{Re}(\lambda)-1}$, und in der Umgebung des Ursprungs dominiert das Feld, das zum Eigenwert mit dem kleinsten Realteil gehört. In diesem Zusammenhang sei an die in Abschnitt 3.2 getroffene Einschränkung $0 < \text{Re } \lambda < 1$ erinnert. Ein eventuell vorhandener Imaginärteil von λ bewirkt eine sogenannte *oszillierende Singularität*, also ein Oszillieren, welches zum Ursprung hin zunimmt und bei Rissen sogar zu formalen Durchdringungen des Materials führen kann. Solche Durchdringungen sind physikalisch unsinnig, und folglich kann eine ermittelte Lösung nur außerhalb des Kontaktbereichs das Spannungs- bzw. Verschiebungsfeld sinnvoll beschreiben. In den meisten Fällen, die von praktischer Bedeutung sind, ist die Kontaktzone jedoch vernachlässigbar klein.

Neben den hier beschriebenen Spannungssingularitäten, kann noch ein weiterer Typ singulären Verhaltens, die sogenannte *logarithmische Singularität*, auftreten. Dieser Typ zeichnet sich durch ein Verhalten der Art $\tilde{r}^{\lambda-1} \ln(\tilde{r})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ aus und wird im nächsten Abschnitt ausführlich diskutiert.

Vergleich der asymptotischen Nahfelder mit einer exakten Lösung

Am elementaren Fall des Griffith-Risses, der in Abschnitt 2.4 geschlossen-analytisch behandelt wurde, soll nun ein Vergleich der Nahfelder aus der exakten Lösung mit den Nahfeldern der asymptotischen Methode erfolgen.

Für die asymptotische Nahfeldanalyse wird das Koordinatensystem auf die rechte Risspitze und der Riss auf die negative reelle Achse gelegt (vgl. Abbildung 2.6b). Da nur ein Sektor bzw. lediglich ein Material vorliegt, gibt es nur die beiden Potentiale $\Phi(z) = a_{11}z^\lambda + a_{21}z^{\bar{\lambda}}$ und $\Psi(z) = b_{11}z^\lambda + b_{21}z^{\bar{\lambda}}$. Es sind ausschließlich die Randbedingungen $\sigma_\varphi + i\tau_\varphi = 0$ entlang der Rissufer $\varphi = \pm\pi$ zu erfüllen, und mit den in Abschnitt 3.2 entwickelten Gleichungen (3.21) und (3.22) erhält man das homogene Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} e^{2i\lambda\varphi} & \lambda & 0 & 1 \\ \lambda & e^{-2i\lambda\varphi} & 1 & 0 \\ e^{-2i\lambda\varphi} & \lambda & 0 & 1 \\ \lambda & e^{2i\lambda\varphi} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ \bar{a}_{21} \\ b_{11} \\ \bar{b}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.54)$$

Nichttriviale Lösungen existieren genau dann, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet und es resultiert die charakteristische Gleichung:

$$-4\sin^2(2\pi\lambda) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \lambda = \frac{n}{2}, \quad n \in \{1, 2, 3, \dots\}. \quad (3.55)$$

Offensichtlich existieren nur reelle Lösungen und formal wird die Gleichung für alle Werte $n \in \mathbb{Z}$ erfüllt, aber bei der hier angegebenen Lösung wurde bereits die Einschränkung $\lambda > 0$ berücksichtigt. Die Spannungen und Verschiebungen können als Linearkombination der zu den Eigenwerten gehörigen Eigenfunktionen dargestellt werden. Mit der Voraussetzung $\lambda \in \mathbb{R}$ folgen die Gleichungen:

$$\sigma_{ij} = K_1 \tilde{r}^{-1/2} \sigma_{ij_1}(\varphi) + K_2 \sigma_{ij_2}(\varphi) + K_3 \tilde{r}^{1/2} \sigma_{ij_3}(\varphi) + \dots, \quad (3.56)$$

$$u_i - u_{i_0} = K_1 \tilde{r}^{1/2} u_{i_1}(\varphi) + K_2 \tilde{r} u_{i_2}(\varphi) + K_3 \tilde{r}^{3/2} u_{i_3}(\varphi) + \dots. \quad (3.57)$$

In der unmittelbaren Umgebung der Risspitze, also für $\tilde{r} \rightarrow 0$ dominiert der erste Term, der die typische Spannungssingularität vom Typ $\sim \tilde{r}^{-1/2}$ beschreibt. Um zu den zugehörigen Nahfeldern zu gelangen, wird $\lambda = \frac{1}{2}$ gesetzt und der Eigenraum zur Koeffizientenmatrix aus (3.54) ermittelt. Dabei ist zu beachten, dass der zu einem reellen Wert λ gehörende Eigenvektor bei einer Analyse im Allgemeinen nicht automatisch die in Abschnitt 3.3 erwähnte Gestalt $[\dots a_k \bar{a}_k b_k \bar{b}_k \dots]^T$ mit konjugiert komplexen Einträgen aufweisen wird. Bei einem 1D-Eigenraum muss diese Gestalt durch Multiplikation mit einer entsprechenden komplexen Konstante c hergestellt werden, was erlaubt ist, da mit jedem Eigenvektor \underline{a} auch $c\underline{a}$ ein Eigenvektor ist, wobei angemerkt sei, dass man im komplexen Fall oft nicht so ohne Weiteres sieht, ob ein Vektor ein skalares Vielfaches des anderen ist, wie z.B. bei $[-1 + 2i \quad -1 - 2i]^T$ und $[-3 + i \quad 1 - 3i]^T$. Wie im Falle eines höherdimensionalen Eigenraums vorzugehen ist, wird direkt anhand des vorliegenden Beispiels demonstriert. Ermittelt man den Nullraum bzw. Kern der Matrix aus (3.54) mit dem Computeralgebrasystem MATHEMATICA, gelangt man zunächst zu den beiden Eigenvektoren $\tilde{\underline{a}}_1 = [\frac{4}{3} \quad \frac{2}{3} \quad 0 \quad 1]^T$ und $\tilde{\underline{a}}_2 = [\frac{2}{3} \quad \frac{4}{3} \quad 1 \quad 0]^T$, die offensichtlich nicht die geforderte Struktur

aufweisen. Da die beiden Vektoren einen zweidimensionalen Eigenraum aufspannen, ist auch jede Linearkombination aus $\tilde{\mathbf{a}}_1$ und $\tilde{\mathbf{a}}_2$ ein Eigenvektor. Durch geeignete (komplexe) Linearkombination gelangt man zu den "richtigen" Eigenvektoren $\mathbf{a}_1 = [2 \ 2 \ 1 \ 1]^T$ und $\mathbf{a}_2 = [-\frac{2i}{3} \ \frac{2i}{3} \ i \ -i]^T$, welche die geforderten Eigenschaften besitzen und bis auf ein reelles Vielfaches eindeutig bestimmt sind.

Die zu $\lambda = \frac{1}{2}$ und dem Eigenvektor \mathbf{a}_1 gehörigen Nahfelder lassen sich unter Zuhilfenahme von (3.44) - (3.48) in der folgenden Form darstellen:

$$\sigma_r = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi\tilde{r}}} \left(5 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \cos\left(\frac{3}{2}\varphi\right) \right), \quad (3.58)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi\tilde{r}}} \left(3 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \cos\left(\frac{3}{2}\varphi\right) \right), \quad (3.59)$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi\tilde{r}}} \left(\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sin\left(\frac{3}{2}\varphi\right) \right), \quad (3.60)$$

$$u_r = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{\tilde{r}}{2\pi}} (\kappa - \cos(\varphi)) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right), \quad (3.61)$$

$$u_\varphi = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{\tilde{r}}{2\pi}} (\kappa - \cos(\varphi)) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right). \quad (3.62)$$

Bis auf die freie reelle Konstante K_I sind diese eindeutig bestimmt. Da sowohl die Spannungs- als auch die Verschiebungsfelder einem symmetrischen Anteil bezüglich der x - Achse entsprechen, wie er sich bei einer Modus I - Rissöffnung einstellt, wurde bei der freien Konstante K_I suggestiv der Index I gesetzt. Durch einen Vergleich der Nahfelder (2.72) - (2.76) aus der analytischen Lösung mit den Nahfeldern (3.58) - (3.62) aus der asymptotischen Analyse erkennt man unter Beachtung von $\tilde{r} = \frac{r}{L}$, dass die Ergebnisse genau übereinstimmen, wenn etwa $K_I = \sigma_y^\infty \sqrt{\pi}$ und $L = a$ gesetzt wird. Damit wird die Bedeutung der bei der Entdimensionierung in (3.1) eingeführten charakteristischen Länge L klar; es handelt sich explizit um die Risslänge a . Nach Klärung dieses Sachverhalts, soll im Folgenden - etwas nachlässig - auf eine Unterscheidung zwischen r und \tilde{r} verzichtet werden. Hervorgehoben sei, dass die Verteilungen der Spannungen und Verschiebungen in der Umgebung der Risspitze mit der asymptotischen Methode exakt erfasst werden.

Wie bereits in Abschnitt 2.4 erwähnt, wird die Stärke der Felder durch den K_I -Faktor bzw. von den K -Faktoren bestimmt. Diese wiederum sind abhängig von der Geometrie des Körpers und von den äußeren Belastungen. In den meisten Fällen wird jedoch keine analytische Lösung des Gesamtproblems zur Verfügung stehen, anhand der dann der K_I -Faktor bestimmt werden kann. Üblicherweise werden zunächst die Spannungen oder Verschiebungen durch numerische Methoden oder Experimente gewonnen. Anschließend wird K_I aus diesen Spannungen oder Verschiebungen durch (3.58) - (3.62) ermittelt; beispielsweise gelten die Beziehungen:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_\varphi(\varphi = 0) \quad , \quad K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2\mu}{\kappa - 1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} u_r(\varphi = 0). \quad (3.63)$$

Da die Bestimmung von K -Faktoren nicht zu den Zielen dieser Arbeit gehört und eine

sachgerechte Behandlung aller Verfahren zur Bestimmung von K -Faktoren den Rahmen sprengen würde, sei auf das Lehrbuch von Gross und Seelig [40] verwiesen.

Zuletzt sollen noch die zu $\lambda = \frac{1}{2}$ und dem Eigenvektor \mathbf{a}_2 gehörigen Nahfelder angegeben werden. Da diese einem antisymmetrischen Anteil bezüglich der x -Achse entsprechen, wie er sich bei einer Modus II -Rissöffnung einstellt, wird die Konstante mit K_{II} bezeichnet:

$$\sigma_r = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left(1 - 3\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right), \quad (3.64)$$

$$\sigma_\varphi = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left(3 - 3\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right), \quad (3.65)$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left(1 - 3\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right), \quad (3.66)$$

$$u_r = -\frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left(1 + \kappa - 6\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right), \quad (3.67)$$

$$u_\varphi = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left(1 - \kappa - 6\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right). \quad (3.68)$$

Es sei noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die ermittelten Spannungs- und Verschiebungsfelder nur in einer kleinen Umgebung (präziser ausgedrückt für $r \ll a$) der Risspitze gültig sind. In hinreichend großem Abstand r dürfen die höheren Terme der Entwicklungen (3.56) und (3.57) nicht mehr vernachlässigt werden.

3.5 Logarithmische Singularitäten

In den Arbeiten von Dempsey und Sinclair [23, 24, 25] werden sogenannte logarithmische Singularitäten, das sind Spannungssingularitäten der Art $\sigma \sim r^{\operatorname{Re} \lambda - 1} \ln(r)$, behandelt. Dempsey arbeitet nicht mit der komplexen Methode, sondern mit (reellen) Airyschen Spannungsfunktionen. Bei dieser Vorgehensweise wird ebenfalls ein lineares Gleichungssystem $\mathbf{B}^* \cdot \mathbf{a}^* = \mathbf{0}$ aufgestellt, dessen Koeffizientendeterminante $D(\lambda) = \det \mathbf{B}^*$ für nichttriviale Lösungen verschwinden muss. Dempsey gibt ein Kriterium für das Auftreten logarithmischer Singularitäten an, nach dem

$$D(\lambda) = 0 \quad (3.69)$$

und zugleich

$$\frac{dD}{d\lambda} = \dots = \frac{d^{4n-m}D}{d\lambda^{4n-m}} = 0 \quad (3.70)$$

erfüllt sein müssen, wobei n die Anzahl der Sektoren der Multi-Materialverbindungsstelle und $m(\lambda)$ der Rang der Koeffizientenmatrix \mathbf{B}^* ist.

Für $r \rightarrow 0$ geben Dempsey und Sinclair dann folgende Arten von Abklingverhalten an:

$$\sigma = \begin{cases} O(r^{\lambda-1}) & \text{für reelle Werte } \lambda \text{ die (3.69) erfüllen,} \\ O\left(r^{\operatorname{Re} \lambda-1} \begin{Bmatrix} \sin(\operatorname{Im}(\lambda) \ln r) \\ \cos(\operatorname{Im}(\lambda) \ln r) \end{Bmatrix}\right) & \text{für komplexe Werte } \lambda \text{ die (3.69) erfüllen,} \\ O(r^{\lambda-1} \ln r) & \text{für reelle Werte } \lambda \text{ die (3.70) erfüllen,} \\ O\left(r^{\operatorname{Re} \lambda-1} \ln r \begin{Bmatrix} \sin(\operatorname{Im}(\lambda) \ln r) \\ \cos(\operatorname{Im}(\lambda) \ln r) \end{Bmatrix}\right) & \text{für komplexe Werte } \lambda \text{ die (3.70) erfüllen.} \end{cases}$$

Im Folgenden soll nur der Fall einer doppelten reellen Nullstelle mit $m = 4n - 1$ betrachtet werden. Dempsey argumentiert in seinen Arbeiten, dass eine logarithmische Singularität (offensichtlich) stärker als die gewöhnliche Singularität $r^{\lambda-1}$ und daher von hoher Bedeutung sei. Nach Meinung des Autors sind die logarithmischen Singularitäten zwar in der Tat stärker, aber nur in einer unbedeutenden Weise. Anhand folgender Abschätzungen soll das verdeutlicht werden. Wegen

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{r^{\lambda-1}}{r^{\lambda-1} \ln r} \right) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln r} \right) = 0 \quad (3.71)$$

sind logarithmische Singularität in der Tat stärker. Jedoch gilt schon für ein beliebig kleines $\epsilon \in \mathbb{R}$, präziser ausgedrückt $\forall \epsilon > 0$:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{r^{\lambda-1-\epsilon}}{r^{\lambda-1} \ln r} \right) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{r^{-\epsilon}}{\ln r} \right) \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{-\epsilon r^{-\epsilon-1}}{r^{-1}} \right) = -\epsilon \left(\lim_{r \rightarrow 0} r^{-\epsilon} \right) = -\infty. \quad (3.72)$$

Die logarithmische Singularität ist in diesen Fällen also schwächer als die (gewöhnliche) $r^{\lambda-1-\epsilon}$ -Singularität. Bei der Untersuchung der Singularitätsordnungen von Multi-Materialkonfigurationen kommen als Unabhängige die Materialeigenschaften (z.B. ein Verhältnis von Elastizitätsmoduln oder Querkontraktionszahlen), oder auch geometrische Größen (z.B. ein Winkelverhältnis) in Frage. Dempsey [25] zeigt, dass logarithmische Singularitäten typischerweise an Übergangsstellen auftreten, wo eine doppelte reellwertige Nullstelle vorliegt, die Regionen mit reellen und komplexen Eigenwerten separiert. Bei diesen Übergangsstellen handelt es sich im Allgemeinen um isolierte Punkte, also z.B. um einen diskreten Winkel, oder um ein bestimmtes Verhältnis von Elastizitätsmoduln, und in direkter Umgebung dieser isolierten Stellen finden sich stets Eigenwerte mit kleinerem Realteil, die eine stärkere gewöhnliche Singularität gemäß (3.72) nach sich ziehen. Zum besseren Verständnis bzw. zur Illustration wird auf diesen Sachverhalt später in den Analysen noch detailliert eingegangen.

Mit einer Erfassung solcher Singularitäten im Rahmen der komplexen Methode beschäftigen sich Cho und Carpenter [10] erstmals in 1998. Dort wird für den Sonderfall eines Bimaterialkerbs gezeigt, dass die Potentiale (3.11) um Anteile von der Gestalt $\tilde{\Phi}_k = \tilde{a}_k z^\lambda \ln(z)$ und $\tilde{\Psi}_k = \tilde{b}_k z^\lambda \ln(z)$ für $k = 1, 2$ zu ergänzen sind, um logarithmische Singularitäten bei einer doppelten reellen Nullstelle der Koeffizientendeterminante erfassen zu können. Dabei sei angemerkt, dass der Term $z^\lambda \ln(z)$ gerade der partiellen Ableitung von z^λ nach λ entspricht.

Mit den derart ergänzten Potentialen erhalten Cho und Carpenter für den Bimaterialkerb ein lineares Gleichungssystem von der Gestalt

$$r^{\lambda-1} \ln(r) \mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{a}} + r^{\lambda-1} \mathbf{G} \cdot \tilde{\mathbf{a}} + r^{\lambda-1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad (3.73)$$

wobei \mathbf{B} und $\mathbf{a} = [a_{11} \ \bar{a}_{21} \ b_{11} \ \bar{b}_{21} \ a_{12} \ \bar{a}_{22} \ b_{12} \ \bar{b}_{22}]^T$ bereits aus den Abschnitten 3.2 und 3.3 bekannt sind, und $\tilde{\mathbf{a}}$ die zusätzlichen Unbekannten gemäß $\tilde{\mathbf{a}} = [\tilde{a}_1 \ \bar{\tilde{a}}_1 \ \tilde{b}_1 \ \bar{\tilde{b}}_1 \ \tilde{a}_2 \ \bar{\tilde{a}}_2 \ \tilde{b}_2 \ \bar{\tilde{b}}_2]^T$ enthält. \mathbf{G} ist die komponentenweise Ableitung von \mathbf{B} nach λ :

$$\mathbf{G} = \frac{d\mathbf{B}}{d\lambda}. \quad (3.74)$$

Da das System (3.73) für beliebige Werte von $r (> 0)$ erfüllt sein muss, kann man nach den unterschiedlichen Abklingverhalten sortieren und folgern, dass die beiden linearen Gleichungssysteme $r^{\lambda-1} \ln(r) \mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$ und $r^{\lambda-1} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{G} \cdot \tilde{\mathbf{a}}) = \mathbf{0}$ erfüllt sein müssen. Dies lässt sich auch in der Form

$$\begin{bmatrix} r^{\lambda-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & r^{\lambda-1} \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ r^{\lambda-1} \ln(r) \mathbf{B} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \tilde{\mathbf{a}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

notieren.

Es soll im Folgenden gezeigt werden, dass das lineare Gleichungssystem bei einer doppelten reellen Nullstelle (und $m = 4n - 1$) nicht nur für Bimaterialkerben die Gestalt von (3.73) annimmt. Diese Gestalt stellt sich bei einer viel größeren Klasse von Multi-Materialkonfigurationen ein, nämlich immer dann, wenn die Übergangs- und Randbedingungen durch Linearkombination der Kolosovschen Gleichungen (2.52) - (2.54), oder der resultierenden Kraftgrößen (2.56) formuliert werden. Die (ergänzten) Potentiale dürfen gemäß Abschnitt 3.3 direkt in der Form

$$\Phi_k = a_k z^\lambda + \tilde{a}_k z^\lambda \ln(z) \quad \text{und} \quad \Psi_k = b_k z^\lambda + \tilde{b}_k z^\lambda \ln(z)$$

angenommen werden, da $\lambda \in \mathbb{R}$ vorausgesetzt wird. Dabei kennzeichnet der tiefgestellte Index k bei den Potentialen und den Konstanten die Zugehörigkeit zum k -ten Sektor. Da die Übergangs- und Randbedingungen schon im einfachen Fall des Bimaterialkerbs auf äußerst lange Ausdrücke führen, wird die Aussage nicht durch eine Vielzahl mühsamer und länglicher Einzelnachweise bewiesen.

Stattdessen wird auch hier mithilfe einer systematischen Vorgehensweise ein einfacher und allgemeingültiger Nachweis erbracht, der nach Kenntnis des Autors neu ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit genügt es wie in Abschnitt 3.3 zu untersuchen, welchen Beitrag ein Potentialausdruck der Art $\Theta, \bar{\Theta}, \Theta', \bar{\Theta}', z\bar{\Theta}', \bar{z}\Theta', z\Theta'', \bar{z}\bar{\Theta}'', \frac{z}{\bar{z}}\Theta', \frac{\bar{z}}{z}\bar{\Theta}'$ im k -ten Sektor zum linearen Gleichungssystem liefert, wobei stellvertretend für Φ_k bzw. Ψ_k das Potential

$$\Theta = c_k z^\lambda + \tilde{c}_k z^\lambda \ln(z)$$

verwendet wird. Es folgen die Einzelnachweise für die verschiedenen Potentialausdrücke. Da diese Nachweise vollkommen analog verlaufen, wird der erste Typ Θ etwas ausführlicher als der Rest kommentiert.

Nachweis für Potentialausdruck vom Typ Θ :

Tritt in einer Übergangs- oder Randbedingung ein Potentialausdruck vom Typ Θ auf, führt dies gemäß der *reellen Vorgehensweise* aus Abschnitt 3.3 zunächst zu den beiden Gleichungen

$$\begin{bmatrix} z^\lambda & 0 & z^\lambda \ln(z) & 0 \\ 0 & \bar{z}^\lambda & 0 & \bar{z}^\lambda \ln(\bar{z}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_k \\ \bar{c}_k \\ \tilde{c}_k \\ \bar{\tilde{c}}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

die hier in Matrixform notiert sind. Dabei kann z einen der Werte $z_{k-1} = \tilde{r}e^{i\varphi_{k-1}}$, $z_k = \tilde{r}e^{i\varphi_k}$ annehmen, je nachdem welches Interface bzw. welcher Rand des k -ten Sektors vorliegt. Um die Übersichtlichkeit zu erhöhen, wird bei sämtlichen Nachweisen auf eine Indizierung von z und φ verzichtet. Unter Beachtung von $\ln(z) = \ln(r) + i\varphi \Rightarrow \overline{\ln(z)} = \ln(r) - i\varphi$ und mit den Matrizen

$$\mathbf{B}^\Theta = \begin{bmatrix} e^{i\lambda\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\lambda\varphi} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{G}^\Theta = \begin{bmatrix} i\varphi e^{i\lambda\varphi} & 0 \\ 0 & -i\varphi e^{-i\lambda\varphi} \end{bmatrix}$$

folgt, dass Θ zum linearen Gleichungssystem den Beitrag

$$r^{\lambda-1} \ln(r) \mathbf{B}^\Theta \cdot \tilde{\mathbf{a}} + r^{\lambda-1} \mathbf{G}^\Theta \cdot \tilde{\mathbf{a}} + r^{\lambda-1} \mathbf{B}^\Theta \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (3.76)$$

liefert, wobei $\mathbf{a} = [c_k \ \bar{c}_k]^T$ und $\tilde{\mathbf{a}} = [\tilde{c}_k \ \bar{\tilde{c}}_k]$ gilt und die Matrizen \mathbf{B}^Θ und \mathbf{G}^Θ die Eigenschaft (3.74) aufweisen. Die Struktur von (3.76) entspricht genau derjenigen von (3.73).

Nachweis für Potentialausdruck vom Typ $\bar{\Theta}$:

Ein Potentialausdruck vom Typ $\bar{\Theta}$ führt zunächst zu den beiden Gleichungen:

$$\begin{bmatrix} 0 & \bar{z}^\lambda & 0 & \bar{z}^\lambda \ln(\bar{z}) \\ z^\lambda & 0 & z^\lambda \ln(z) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_k \\ \bar{c}_k \\ \tilde{c}_k \\ \bar{\tilde{c}}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Mit den Matrizen

$$\mathbf{B}^{\bar{\Theta}} = \begin{bmatrix} 0 & e^{-i\lambda\varphi} \\ e^{i\lambda\varphi} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{G}^{\bar{\Theta}} = \begin{bmatrix} 0 & -i\varphi e^{-i\lambda\varphi} \\ i\varphi e^{i\lambda\varphi} & 0 \end{bmatrix}$$

folgt, dass $\bar{\Theta}$ zum linearen Gleichungssystem den Beitrag

$$r^{\lambda-1} \ln(r) \mathbf{B}^{\bar{\Theta}} \cdot \tilde{\mathbf{a}} + r^{\lambda-1} \mathbf{G}^{\bar{\Theta}} \cdot \tilde{\mathbf{a}} + r^{\lambda-1} \mathbf{B}^{\bar{\Theta}} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (3.77)$$

liefert, wobei die Matrizen $\mathbf{B}^{\bar{\Theta}}$ und $\mathbf{G}^{\bar{\Theta}}$ die Eigenschaft (3.74) aufweisen.

Nachweis für Potentialausdruck vom Typ Θ' :

Ein Potentialausdruck vom Typ Θ' führt zunächst zu den beiden Gleichungen:

$$\begin{bmatrix} \lambda z^{\lambda-1} & 0 & z^{\lambda-1}(1 + \lambda \ln(z)) & 0 \\ 0 & \lambda \bar{z}^{\lambda-1} & 0 & \bar{z}^{\lambda-1}(1 + \lambda \ln(\bar{z})) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_k \\ \bar{c}_k \\ \tilde{c}_k \\ \bar{\tilde{c}}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Mit den Matrizen

$$\mathbf{B}^{\Theta'} = \begin{bmatrix} \lambda e^{i(\lambda-1)\varphi} & 0 \\ 0 & \lambda e^{-i(\lambda-1)\varphi} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{G}^{\Theta'} = \begin{bmatrix} e^{i(\lambda-1)\varphi}(1 + i\lambda\varphi) & 0 \\ 0 & e^{-i(\lambda-1)\varphi}(1 - i\lambda\varphi) \end{bmatrix}$$

folgt, dass Θ'_k zum linearen Gleichungssystem den Beitrag

$$r^{\lambda-1} \ln(r) \mathbf{B}^{\Theta'} \cdot \tilde{\mathbf{a}} + r^{\lambda-1} \mathbf{G}^{\Theta'} \cdot \tilde{\mathbf{a}} + r^{\lambda-1} \mathbf{B}^{\Theta'} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (3.78)$$

liefert, wobei die Matrizen $\mathbf{B}^{\Theta'}$ und $\mathbf{G}^{\Theta'}$ die Eigenschaft (3.74) aufweisen.

Nachweis für Potentialausdruck vom Typ $\bar{\Theta}'$:

Ein Potentialausdruck vom Typ $\bar{\Theta}'$ führt zunächst zu den beiden Gleichungen:

$$\begin{bmatrix} 0 & \lambda \bar{z}^{\lambda-1} & 0 & \bar{z}^{\lambda-1}(1 + \lambda \ln(\bar{z})) \\ \lambda z^{\lambda-1} & 0 & z^{\lambda-1}(1 + \lambda \ln(z)) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_k \\ \bar{c}_k \\ \tilde{c}_k \\ \bar{\tilde{c}}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Mit den Matrizen

$$\mathbf{B}^{\bar{\Theta}'} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda e^{-i(\lambda-1)\varphi} \\ \lambda e^{i(\lambda-1)\varphi} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{G}^{\bar{\Theta}'} = \begin{bmatrix} 0 & e^{-i(\lambda-1)\varphi}(1 - i\lambda\varphi) \\ e^{i(\lambda-1)\varphi}(1 + i\lambda\varphi) & 0 \end{bmatrix}$$

folgt, dass $\bar{\Theta}'$ zum linearen Gleichungssystem den Beitrag

$$r^{\lambda-1} \ln(r) \mathbf{B}^{\bar{\Theta}'} \cdot \tilde{\mathbf{a}} + r^{\lambda-1} \mathbf{G}^{\bar{\Theta}'} \cdot \tilde{\mathbf{a}} + r^{\lambda-1} \mathbf{B}^{\bar{\Theta}'} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (3.79)$$

liefert, wobei die Matrizen $\mathbf{B}^{\bar{\Theta}'}$ und $\mathbf{G}^{\bar{\Theta}'}$ die Eigenschaft (3.74) aufweisen.

Nachweis für Potentialausdruck vom Typ $z\bar{\Theta}'$:

Ein Potentialausdruck vom Typ $z\bar{\Theta}'$ führt zunächst zu den beiden Gleichungen:

$$\begin{bmatrix} 0 & z\lambda \bar{z}^{\lambda-1} & 0 & z\bar{z}^{\lambda-1}(1 + \lambda \ln(\bar{z})) \\ \bar{z}\lambda z^{\lambda-1} & 0 & \bar{z}z^{\lambda-1}(1 + \lambda \ln(z)) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_k \\ \bar{c}_k \\ \tilde{c}_k \\ \bar{\tilde{c}}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Mit den Matrizen

$$\mathbf{B}^{z\bar{\Theta}'} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda e^{-i(\lambda-2)\varphi} \\ \lambda e^{i(\lambda-2)\varphi} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{G}^{z\bar{\Theta}'} = \begin{bmatrix} 0 & e^{-i(\lambda-2)\varphi}(1 - i\lambda\varphi) \\ e^{i(\lambda-2)\varphi}(1 + i\lambda\varphi) & 0 \end{bmatrix}$$

folgt, dass $z\bar{\Theta}'_k$ zum linearen Gleichungssystem den Beitrag

$$r^{\lambda-1} \ln(r) \mathbf{B}^{z\bar{\Theta}'} \cdot \tilde{\mathbf{a}} + r^{\lambda-1} \mathbf{G}^{z\bar{\Theta}'} \cdot \tilde{\mathbf{a}} + r^{\lambda-1} \mathbf{B}^{z\bar{\Theta}'} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (3.80)$$

liefert, wobei die Matrizen $\mathbf{B}^{z\bar{\Theta}'}$ und $\mathbf{G}^{z\bar{\Theta}'}$ die Eigenschaft (3.74) aufweisen.

Nachweis für Potentialausdruck vom Typ $\bar{z}\Theta'$:

Ein Potentialausdruck vom Typ $\bar{z}\Theta'$ führt zunächst zu den beiden Gleichungen:

$$\begin{bmatrix} \bar{z}\lambda z^{\lambda-1} & 0 & \bar{z}z^{\lambda-1}(1 + \lambda \ln(z)) & 0 \\ 0 & z\lambda \bar{z}^{\lambda-1} & 0 & z\bar{z}^{\lambda-1}(1 + \lambda \ln(\bar{z})) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_k \\ \bar{c}_k \\ \tilde{c}_k \\ \bar{\tilde{c}}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Mit den Matrizen

$$\mathbf{B}^{\bar{z}\Theta'} = \begin{bmatrix} \lambda e^{i(\lambda-2)\varphi} & 0 \\ 0 & \lambda e^{-i(\lambda-2)\varphi} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{G}^{\bar{z}\Theta'} = \begin{bmatrix} e^{i(\lambda-2)\varphi}(1 + i\lambda\varphi) & 0 \\ 0 & e^{-i(\lambda-2)\varphi}(1 - i\lambda\varphi) \end{bmatrix}$$

folgt, dass $\bar{z}\Theta'_k$ zum linearen Gleichungssystem den Beitrag

$$r^{\lambda-1} \ln(r) \mathbf{B}^{\bar{z}\Theta'} \cdot \tilde{\mathbf{a}} + r^{\lambda-1} \mathbf{G}^{\bar{z}\Theta'} \cdot \tilde{\mathbf{a}} + r^{\lambda-1} \mathbf{B}^{\bar{z}\Theta'} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (3.81)$$

liefert, wobei und die Matrizen $\mathbf{B}^{\bar{z}\Theta'}$ und $\mathbf{G}^{\bar{z}\Theta'}$ die Eigenschaft (3.74) aufweisen.

Nachweis für Potentialausdruck vom Typ $z\Theta''$:

Ein Potentialausdruck vom Typ $z\Theta''$ führt zunächst zu den beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \lambda(\lambda-1)z^{\lambda-1}c_k + z^{\lambda-1}(2\lambda-1 + \lambda(\lambda-1)\ln(z))\tilde{c}_k &= 0, \\ \lambda(\lambda-1)\bar{z}^{\lambda-1}\bar{c}_k + \bar{z}^{\lambda-1}(2\lambda-1 + \lambda(\lambda-1)\ln(\bar{z}))\bar{\tilde{c}}_k &= 0. \end{aligned}$$

Mit den Matrizen

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{z\Theta''} &= \begin{bmatrix} \lambda(\lambda-1)e^{i(\lambda-1)\varphi} & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-1)e^{-i(\lambda-1)\varphi} \end{bmatrix} \quad \text{und} \\ \mathbf{G}^{z\Theta''} &= \begin{bmatrix} (2\lambda-1 + \lambda(\lambda-1)i\varphi)e^{i(\lambda-1)\varphi} & 0 \\ 0 & (2\lambda-1 - \lambda(\lambda-1)i\varphi)e^{-i(\lambda-1)\varphi} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

folgt, dass $z\Theta''_k$ zum linearen Gleichungssystem den Beitrag

$$r^{\lambda-1} \ln(r) \mathbf{B}^{z\Theta''} \cdot \tilde{\mathbf{a}} + r^{\lambda-1} \mathbf{G}^{z\Theta''} \cdot \tilde{\mathbf{a}} + r^{\lambda-1} \mathbf{B}^{z\Theta''} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (3.82)$$

liefert, wobei die Matrizen $\mathbf{B}^{z\Theta''}$ und $\mathbf{G}^{z\Theta''}$ die Eigenschaft (3.74) aufweisen.

Nachweis für Potentialausdruck vom Typ $\bar{z}\bar{\Theta}''$:

Ein Potentialausdruck vom Typ $\bar{z}\bar{\Theta}''$ führt zunächst zu den beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned}\lambda(\lambda-1)\bar{z}^{\lambda-1}\bar{c}_k + \bar{z}^{\lambda-1}(2\lambda-1+\lambda(\lambda-1)\ln(\bar{z}))\bar{\tilde{c}}_k &= 0, \\ \lambda(\lambda-1)z^{\lambda-1}c_k + z^{\lambda-1}(2\lambda-1+\lambda(\lambda-1)\ln(z))\tilde{c}_k &= 0.\end{aligned}$$

Mit den Matrizen

$$\begin{aligned}\mathbf{B}^{\bar{z}\bar{\Theta}''} &= \begin{bmatrix} 0 & \lambda(\lambda-1)e^{-i(\lambda-1)\varphi} \\ \lambda(\lambda-1)e^{i(\lambda-1)\varphi} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \\ \mathbf{G}^{\bar{z}\bar{\Theta}''} &= \begin{bmatrix} 0 & (2\lambda-1-\lambda(\lambda-1)i\varphi)e^{-i(\lambda-1)\varphi} \\ (2\lambda-1+\lambda(\lambda-1)i\varphi)e^{i(\lambda-1)\varphi} & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

folgt, dass $\bar{z}\bar{\Theta}''$ zum linearen Gleichungssystem den Beitrag

$$r^{\lambda-1}\ln(r)\mathbf{B}^{\bar{z}\bar{\Theta}''} \cdot \tilde{\mathbf{a}} + r^{\lambda-1}\mathbf{G}^{\bar{z}\bar{\Theta}''} \cdot \tilde{\mathbf{a}} + r^{\lambda-1}\mathbf{B}^{\bar{z}\bar{\Theta}''} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (3.83)$$

liefert, wobei die Matrizen $\mathbf{B}^{\bar{z}\bar{\Theta}''}$ und $\mathbf{G}^{\bar{z}\bar{\Theta}''}$ die Eigenschaft (3.74) aufweisen.

Nachweis für Potentialausdruck vom Typ $\frac{z}{z}\Theta'$:

Ein Potentialausdruck vom Typ $\frac{z}{z}\Theta'$ führt zunächst zu den beiden Gleichungen:

$$\begin{bmatrix} \lambda z^\lambda \bar{z}^{-1} & 0 & \bar{z}^{-1} z^\lambda (1 + \lambda \ln(z)) & 0 \\ 0 & \lambda \bar{z}^\lambda z^{-1} & 0 & z^{-1} \bar{z}^\lambda (1 + \lambda \ln(\bar{z})) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_k \\ \bar{c}_k \\ \tilde{c}_k \\ \bar{\tilde{c}}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Mit den Matrizen

$$\mathbf{B}^{\frac{z}{z}\Theta'} = \begin{bmatrix} \lambda e^{i(\lambda+1)\varphi} & 0 \\ 0 & \lambda e^{-i(\lambda+1)\varphi} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{G}^{\frac{z}{z}\Theta'} = \begin{bmatrix} e^{i(\lambda+1)\varphi}(1+i\lambda\varphi) & 0 \\ 0 & e^{-i(\lambda+1)\varphi}(1-i\lambda\varphi) \end{bmatrix}$$

folgt, dass $\frac{z}{z}\Theta'_k$ zum linearen Gleichungssystem den Beitrag

$$r^{\lambda-1}\ln(r)\mathbf{B}^{\frac{z}{z}\Theta'} \cdot \tilde{\mathbf{a}} + r^{\lambda-1}\mathbf{G}^{\frac{z}{z}\Theta'} \cdot \tilde{\mathbf{a}} + r^{\lambda-1}\mathbf{B}^{\frac{z}{z}\Theta'} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (3.84)$$

liefert, wobei die Matrizen $\mathbf{B}^{\frac{z}{z}\Theta'}$ und $\mathbf{G}^{\frac{z}{z}\Theta'}$ die Eigenschaft (3.74) aufweisen.

Nachweis für Potentialausdruck vom Typ $\frac{\bar{z}}{z}\bar{\Theta}'$:

Ein Potentialausdruck vom Typ $\frac{\bar{z}}{z}\bar{\Theta}'$ führt zunächst zu den beiden Gleichungen:

$$\begin{bmatrix} 0 & \lambda \bar{z}^\lambda z^{-1} & 0 & z^{-1} \bar{z}^\lambda (1 + \lambda \ln(\bar{z})) \\ \lambda z^\lambda \bar{z}^{-1} & 0 & \bar{z}^{-1} z^\lambda (1 + \lambda \ln(z)) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_k \\ \bar{c}_k \\ \tilde{c}_k \\ \bar{\tilde{c}}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Mit den Matrizen

$$\mathbf{B}_{\bar{z}\bar{\Theta}'} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda e^{-i(\lambda+1)\varphi} \\ \lambda e^{i(\lambda+1)\varphi} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{G}_{\bar{z}\bar{\Theta}'} = \begin{bmatrix} 0 & e^{-i(\lambda+1)\varphi}(1 - i\lambda\varphi) \\ e^{i(\lambda+1)\varphi}(1 + i\lambda\varphi) & 0 \end{bmatrix}$$

folgt, dass $\bar{z}\bar{\Theta}'$ zum linearen Gleichungssystem den Beitrag

$$r^{\lambda-1} \ln(r) \mathbf{B}_{\bar{z}\bar{\Theta}'} \cdot \tilde{\mathbf{a}} + r^{\lambda-1} \mathbf{G}_{\bar{z}\bar{\Theta}'} \cdot \tilde{\mathbf{a}} + r^{\lambda-1} \mathbf{B}_{\bar{z}\bar{\Theta}'} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (3.85)$$

liefert, wobei die Matrizen $\mathbf{B}_{\bar{z}\bar{\Theta}'}$ und $\mathbf{G}_{\bar{z}\bar{\Theta}'}$ die Eigenschaft (3.74) aufweisen.

Zusammenfassung auf Basis der vorigen Nachweise:

Ähnlich wie bei der Finite-Elemente-Methode, können die zuvor betrachteten Beiträge \mathbf{B}^Θ , \mathbf{G}^Θ , $\mathbf{B}^{\bar{\Theta}}$, $\mathbf{G}^{\bar{\Theta}}$, $\mathbf{B}^{\Theta'}$, $\mathbf{G}^{\Theta'}$, ..., $\mathbf{B}_{\bar{z}\bar{\Theta}'}$, $\mathbf{G}_{\bar{z}\bar{\Theta}'}$ als Elementmatrizen aufgefasst werden, die zur Formulierung einer Übergangs- oder Randbedingung am Interface Γ_k zu Matrizen \mathbf{B}_{Γ_k} und \mathbf{G}_{Γ_k} assembliert werden müssen. Diese Matrizen wiederum werden zu Gesamtmatrizen \mathbf{B} und \mathbf{G} assembliert, da bei einer Multi-Materialkonfiguration ein ganzes System von Übergangs- und Randbedingungen vorliegt. Da alle Beiträge (3.76) - (3.85) die gleiche Struktur wie (3.73) aufweisen und linear eingehen, folgt die eingangs getroffene Behauptung, dass das lineare Gleichungssystem für das Gesamtproblem die Gestalt

$$r^{\lambda-1} \ln(r) \mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{a}} + r^{\lambda-1} \mathbf{G} \cdot \tilde{\mathbf{a}} + r^{\lambda-1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

annimmt.

Abschließend sei noch angegeben, welcher Beitrag zu den Spannungen und Verschiebungen (3.44) - (3.48) im k -ten Sektor durch die zusätzlichen Potentialterme $\tilde{\Phi}_k = \tilde{a}_k z^\lambda \ln(z)$ und $\tilde{\Psi}_k = \tilde{b}_k z^\lambda \ln(z)$ entsteht:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_r = & r^{\lambda-1} \ln(r) \lambda \left[(3 - \lambda) \left(\operatorname{Re}(\tilde{a}_k) \cos((\lambda - 1)\varphi) - \operatorname{Im}(\tilde{a}_k) \sin((\lambda - 1)\varphi) \right) \right. \\ & \left. - \operatorname{Re}(\tilde{b}_k) \cos((\lambda + 1)\varphi) + \operatorname{Im}(\tilde{b}_k) \sin((\lambda + 1)\varphi) \right] \\ & + r^{\lambda-1} \left[\lambda \varphi \left\{ (\lambda - 3) \left\{ \operatorname{Re}(\tilde{a}_k) \sin((\lambda - 1)\varphi) + \operatorname{Im}(\tilde{a}_k) \cos((\lambda - 1)\varphi) \right\} \right. \right. \\ & \left. \left. + \operatorname{Re}(\tilde{b}_k) \sin((\lambda + 1)\varphi) + \operatorname{Im}(\tilde{b}_k) \cos((\lambda + 1)\varphi) \right\} + (3 - 2\lambda) \right. \\ & \left. \cdot \left(\operatorname{Re}(\tilde{a}_k) \cos((\lambda - 1)\varphi) - \operatorname{Im}(\tilde{a}_k) \sin((\lambda - 1)\varphi) \right) \right. \\ & \left. - \operatorname{Re}(\tilde{b}_k) \cos((\lambda + 1)\varphi) + \operatorname{Im}(\tilde{b}_k) \sin((\lambda + 1)\varphi) \right], \end{aligned} \quad (3.86)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_\varphi = & r^{\lambda-1} \ln(r) \lambda \left[(1 + \lambda) \left(\operatorname{Re}(\tilde{a}_k) \cos((\lambda - 1)\varphi) - \operatorname{Im}(\tilde{a}_k) \sin((\lambda - 1)\varphi) \right) \right. \\
& \left. + \operatorname{Re}(\tilde{b}_k) \cos((\lambda + 1)\varphi) - \operatorname{Im}(\tilde{b}_k) \sin((\lambda + 1)\varphi) \right] \\
& + r^{\lambda-1} \left[-\lambda \varphi \left((1 + \lambda) \left\{ \operatorname{Re}(\tilde{a}_k) \sin((\lambda - 1)\varphi) + \operatorname{Im}(\tilde{a}_k) \cos((\lambda - 1)\varphi) \right\} \right. \right. \\
& \left. \left. + \operatorname{Re}(\tilde{b}_k) \sin((\lambda + 1)\varphi) + \operatorname{Im}(\tilde{b}_k) \cos((\lambda + 1)\varphi) \right) + (1 + 2\lambda) \right. \\
& \cdot \left(\operatorname{Re}(\tilde{a}_k) \cos((\lambda - 1)\varphi) - \operatorname{Im}(\tilde{a}_k) \sin((\lambda - 1)\varphi) \right) \\
& \left. + \operatorname{Re}(\tilde{b}_k) \cos((\lambda + 1)\varphi) - \operatorname{Im}(\tilde{b}_k) \sin((\lambda + 1)\varphi) \right] , \tag{3.87}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}_{r\varphi} = & r^{\lambda-1} \ln(r) \lambda \left[(\lambda - 1) \left(\operatorname{Re}(\tilde{a}_k) \sin((\lambda - 1)\varphi) + \operatorname{Im}(\tilde{a}_k) \cos((\lambda - 1)\varphi) \right) \right. \\
& \left. + \operatorname{Re}(\tilde{b}_k) \sin((\lambda + 1)\varphi) + \operatorname{Im}(\tilde{b}_k) \cos((\lambda + 1)\varphi) \right] \\
& + r^{\lambda-1} \left[\lambda \varphi \left((\lambda - 1) \left\{ \operatorname{Re}(\tilde{a}_k) \cos((\lambda - 1)\varphi) + \operatorname{Im}(\tilde{a}_k) \sin((\lambda - 1)\varphi) \right\} \right. \right. \\
& \left. \left. + \operatorname{Re}(\tilde{b}_k) \cos((\lambda + 1)\varphi) - \operatorname{Im}(\tilde{b}_k) \sin((\lambda + 1)\varphi) \right) + (2\lambda - 1) \right. \\
& \cdot \left(\operatorname{Re}(\tilde{a}_k) \sin((\lambda - 1)\varphi) + \operatorname{Im}(\tilde{a}_k) \cos((\lambda - 1)\varphi) \right) \\
& \left. + \operatorname{Re}(\tilde{b}_k) \sin((\lambda + 1)\varphi) + \operatorname{Im}(\tilde{b}_k) \cos((\lambda + 1)\varphi) \right] , \tag{3.88}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_r = & \frac{1}{2\mu_k} r^\lambda \ln(r) \left[(\kappa_k - \lambda) \left(\operatorname{Re}(\tilde{a}_k) \cos((\lambda - 1)\varphi) - \operatorname{Im}(\tilde{a}_k) \sin((\lambda - 1)\varphi) \right) \right. \\
& \left. - \operatorname{Re}(\tilde{b}_k) \cos((\lambda + 1)\varphi) + \operatorname{Im}(\tilde{b}_k) \sin((\lambda + 1)\varphi) \right] \\
& + \frac{1}{2\mu_k} r^\lambda \left[\varphi \left((\lambda - \kappa_k) \left\{ \operatorname{Re}(\tilde{a}_k) \sin((\lambda - 1)\varphi) + \operatorname{Im}(\tilde{a}_k) \cos((\lambda - 1)\varphi) \right\} \right. \right. \\
& \left. \left. + \operatorname{Re}(\tilde{b}_k) \sin((\lambda + 1)\varphi) + \operatorname{Im}(\tilde{b}_k) \cos((\lambda + 1)\varphi) \right) \right. \\
& \left. - \operatorname{Re}(\tilde{a}_k) \cos((\lambda - 1)\varphi) + \operatorname{Im}(\tilde{a}_k) \sin((\lambda - 1)\varphi) \right] , \tag{3.89}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_\varphi = & \frac{1}{2\mu_k} r^\lambda \ln(r) \left[(\kappa_k + \lambda) \left(\operatorname{Re}(\tilde{a}_k) \sin((\lambda - 1)\varphi) + \operatorname{Im}(\tilde{a}_k) \cos((\lambda - 1)\varphi) \right) \right. \\
& \left. + \operatorname{Re}(\tilde{b}_k) \sin((\lambda + 1)\varphi) + \operatorname{Im}(\tilde{b}_k) \cos((\lambda + 1)\varphi) \right. \\
& \left. + \frac{1}{2\mu_k} r^\lambda \left[\varphi \left((\kappa_k + \lambda) \left\{ \operatorname{Re}(\tilde{a}_k) \cos((\lambda - 1)\varphi) - \operatorname{Im}(\tilde{a}_k) \sin((\lambda - 1)\varphi) \right\} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \operatorname{Re}(\tilde{b}_k) \cos((\lambda + 1)\varphi) - \operatorname{Im}(\tilde{b}_k) \sin((\lambda + 1)\varphi) \right) \right. \\
& \left. \left. + \operatorname{Re}(\tilde{a}_k) \sin((\lambda - 1)\varphi) + \operatorname{Im}(\tilde{a}_k) \cos((\lambda - 1)\varphi) \right] \right] . \tag{3.90}
\end{aligned}$$

Die Gestalt der aus den zusätzlichen Potentialtermen $\tilde{\Phi}_k = \tilde{a}_k z^\lambda \ln(z)$ und $\tilde{\Psi}_k = \tilde{b}_k z^\lambda \ln(z)$ resultierenden Spannungen und Verschiebungen (3.86) - (3.90) wird auch in der Arbeit

von Cho und Carpenter [10] betrachtet. Dort liegen an einigen Stellen andere Vorzeichen vor, wobei es sich anscheinend um Fehler in [10] handelt.

Bisher wurde ausschließlich der Fall doppelter reeller Nullstellen betrachtet, bei dem die zusätzlichen Potentiale $\tilde{\Phi}_k$ und $\tilde{\Psi}_k$ mit dem typischen Term $z^\lambda \ln(z)$ verwendet wurden. Neben diesen sind noch Nullstellen höherer Ordnung denkbar, die die Bedingungen (3.69) und (3.70) von Dempsey erfüllen. Hier müssen zur Analyse Ergänzungspotentiale eingesetzt werden, die dann gegebenenfalls höheren partiellen Ableitungen von z^λ nach λ entsprechen. Zum Beispiel lauten bei einer dreifachen Nullstelle mit $m = 4n - 2$ (vgl. (3.70)) die Ergänzungspotentiale $\tilde{\Phi}_k = z^\lambda (\ln z)^2$ und $\tilde{\Psi}_k = z^\lambda (\ln z)^2$. Hieraus resultieren zusätzliche Spannungsterme der Art $r^{\lambda-1} (\ln(r))^2$ und es lässt sich mit ähnlichen Abschätzungen wie in (3.71) und (3.72) leicht zeigen, dass diese logarithmischen Singularitäten ebenfalls als eher unbedeutend bzw. akademisch anzusehen sind. Gleiches gilt für mehrfache komplexwertige Nullstellen. Daher und weil die Behandlung weitgehend analog zum vorigen Fall verläuft, ohne dabei zusätzliche Erkenntnisse zu liefern, werden solche Fälle nicht weiter betrachtet.

3.6 Dundurs-Parameter

Bei der Betrachtung einer beliebigen, linear-elastischen Bimaterialkonfiguration mit vorgegebenen Spannungsrandbedingungen, sind die Spannungen in einem beliebigen Punkt des Körpers im Allgemeinen Funktionen von drei Unabhängigen, die sich aus den elastischen Konstanten zusammensetzen, z.B. das Verhältnis der Elastizitätsmoduln E_2/E_1 und der beiden Querkontraktionszahlen ν_1 und ν_2 .

In der Arbeit [26] von Dundurs wird eine bemerkenswerte Möglichkeit zur Reduktion der Problemgröße bei linear-elastischen Bimaterialkonfigurationen im Falle eines ebenen Verzerrungszustandes oder ebenen Spannungszustandes hergeleitet. Dundurs zeigt, dass die Spannungen lediglich von zwei Kombinationen von elastischen Konstanten abhängen. Dabei darf die Konfiguration auch mehrfach zusammenhängend sein. Mehrfach zusammenhängend ist ein Begriff der Topologie und soll hier nicht exakt definiert werden; vielmehr soll die anschauliche Interpretation von einem Gebiet der komplexen Zahlenebene mit Löchern zur Erklärung genügen. Im Falle einer solchen, mehrfach zusammenhängenden Konfiguration muss dann für die Reduktion nach Dundurs die zusätzliche Bedingung erfüllt sein, dass die vektorielle Summe der Lasten auf jedem Loch verschwindet.

Mit den in Abschnitt 3.1 zur Verfügung gestellten Übergangsbedingungen sind die Überlegungen von Dundurs leicht nachzuvollziehen und sollen hier für den Fall eines perfekt verbundenen Interfaces zwischen den Materialien 1 und 2 kurz vorgestellt werden. Mit dem Verhältnis der Schubmoduln $\Gamma = \mu_2/\mu_1$ lauten die Übergangsbedingungen:

$$\Gamma (\kappa_1 \Phi_1 - z \overline{\Phi'_1} - \overline{\Psi_1}) = \kappa_2 \Phi_2 - z \overline{\Phi'_2} - \overline{\Psi_2}, \quad (3.91)$$

$$\Phi_1 + z \overline{\Phi'_1} + \overline{\Psi_1} = \Phi_2 + z \overline{\Phi'_2} + \overline{\Psi_2}. \quad (3.92)$$

An dieser Stelle liegt offensichtlich noch die eingangs beschriebene Situation mit drei elastischen Parametern Γ , κ_1 und κ_2 vor.

Bildet man nun die Linearkombinationen $(3.91) + \Gamma \cdot (3.92)$ und $\Gamma \kappa_1 \cdot (3.92) - (3.91)$ und

dividiert die beiden entstandenen Gleichungen durch $\Gamma(\kappa_1 + 1)$, erhält man schließlich die beiden (zu (3.91) und (3.92) äquivalenten) Gleichungen:

$$\Phi_1 = \frac{\Gamma + \kappa_2}{\Gamma(\kappa_1 + 1)} \Phi_2 + \frac{\Gamma - 1}{\Gamma(\kappa_1 + 1)} (z \overline{\Phi'_2} + \overline{\Psi_2}) , \quad (3.93)$$

$$z \overline{\Phi'_1} + \overline{\Psi_1} = \frac{\Gamma \kappa_1 - \kappa_2}{\Gamma(\kappa_1 + 1)} \Phi_2 + \frac{\Gamma \kappa_1 + 1}{\Gamma(\kappa_1 + 1)} (z \overline{\Phi'_2} + \overline{\Psi_2}) . \quad (3.94)$$

In den Gleichungen (3.93) und (3.94) treten vier Brüche auf, die alle elastischen Größen enthalten und daher als elastische Parameter des Problems angesehen werden können. Wegen der Beziehungen

$$\frac{\Gamma \kappa_1 - \kappa_2}{\Gamma(\kappa_1 + 1)} = 1 - \frac{\Gamma + \kappa_2}{\Gamma(\kappa_1 + 1)} \quad , \quad \frac{\Gamma \kappa_1 + 1}{\Gamma(\kappa_1 + 1)} = 1 - \frac{\Gamma - 1}{\Gamma(\kappa_1 + 1)} \quad (3.95)$$

folgt unmittelbar, dass von den elastischen Parametern nur zwei unabhängig voneinander verändert werden können, womit die Problemgröße von drei auf zwei Unabhängige reduziert ist. Statt mit diesen vier Brüchen zu arbeiten, empfiehlt Dundurs die Parameter

$$\delta^D = \frac{\Gamma \kappa_1 + 1}{\kappa_2 + 1} \quad \text{und} \quad \eta^D = \frac{\Gamma + \kappa_2}{\kappa_2 + 1} \quad (3.96)$$

zu verwenden, da die Brüche in weiterführenden Betrachtungen auf längliche Ausdrücke führen würden. Mit diesen *Dundurs-Parametern* lassen sich die Übergangsbedingungen (3.93) und (3.94) wie folgt angeben:

$$(\delta^D + \eta^D - 1) \Phi_1 = \eta^D \Phi_2 + (\eta^D - 1) (z \overline{\Phi'_2} + \overline{\Psi_2}) , \quad (3.97)$$

$$(\delta^D + \eta^D - 1) (z \overline{\Phi'_1} + \overline{\Psi_1}) = (\delta^D - 1) \Phi_2 + \delta^D (z \overline{\Phi'_2} + \overline{\Psi_2}) . \quad (3.98)$$

Die physikalisch erlaubten Werte von δ^D und η^D beschreiben wegen $0 \leq \Gamma \leq \infty$ und $1 \leq \kappa_1, \kappa_2 \leq 3$ in der (δ^D, η^D) -Ebene einen halbbunendlichen Streifen und es sei noch angemerkt, dass es möglich und häufig auch zweckmäßig ist, andere Dundurs-Parameter zu definieren, die ebenfalls eine Reduktion der Problemgröße bewirken. Ein Beispiel wäre etwa:

$$\delta^{D'} = \frac{\mu_1 + \mu_2 \kappa_1}{\mu_2(\kappa_1 + 1)} \quad , \quad \eta^{D'} = \frac{\mu_2 + \mu_1 \kappa_2}{\mu_1(\kappa_2 + 1)} . \quad (3.99)$$

Die Verwendung von Dundurs-Parametern bringt aber auch einen großen Nachteil mit sich, denn Ergebnisse und insbesondere Diagramme, die auf Dundurs-Parametern basieren, sind nur für gut eingearbeitete Spezialisten lesbar bzw. brauchbar. Daher und weil bei den Beispielen in Kapitel 4 auch Konfigurationen mit drei Materialien untersucht werden, bei denen die Parameter ohnehin nicht sinnvoll eingesetzt werden können, wird in dieser Arbeit auf eine Anwendung verzichtet.

3.7 Zusammenfassung und Diskussion

Im vorliegenden Kapitel 3 sind grundlegende theoretische Aspekte der asymptotischen Nahfeldanalyse an ebenen Multi-Materialverbindungsstellen mit der komplexen Methode

beschrieben worden. Die dabei vorgestellten Formulierungen werden im nächsten Kapitel für asymptotische Nahfeldanalysen an ebenen Multi-Materialverbindungsstellen verwendet. Im Folgenden wird eine kurze Zusammenfassung von Kapitels 3 und - wo nötig - auch eine Diskussion gegeben. Dabei werden auch andere Vorgehensweisen/Techniken zur Nahfeldanalyse, die nicht auf der komplexen Methode basieren, berücksichtigt.

Unabhängig von einer speziellen Technik, zeichnen sich asymptotische Nahfeldanalysen von Multi-Materialkonfigurationen durch einen ähnlichen Ablauf aus: Aus dem bestehenden Satz an Übergangs- und Randbedingungen wird ein lineares Gleichungssystem gewonnen. Die Forderung nach nichttrivialen Lösungen dieses Systems führt zu den Nullstellen ("Eigenwerten") λ des charakteristischen Polynoms, die mit dem singulären Spannungsverhalten in der Form $\sigma \sim r^{\operatorname{Re} \lambda - 1}$ zusammenhängen.

In diesen Ablauf ordnen sich die Abschnitte 3.1 und 3.2 wie folgt ein: In 3.1 sind Übergangs- und Randbedingungen in allgemeiner Form mit Hilfe komplexer Potentiale formuliert worden. Nach einer auf Theocaris [82] zurückgehenden Annahme für die Potentiale, die explizit komplexwertige Exponenten λ zulässt, wurden in Abschnitt 3.2 mit dem *komplexen Vorgehen* aus den Übergangs- und Randbedingungen verschiedene Gleichungen gewonnen. Dieser resultierende Satz von Gleichungen bildet ein lineares Gleichungssystem, dessen Koeffizientendeterminante für nichttriviale Lösungen verschwinden muss.

Da in vielen Veröffentlichungen mit anderen Vorgehensweisen gearbeitet wird, bei denen für die Exponenten a priori $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt, wird anschließend in Abschnitt 3.3 diskutiert, welchen Einfluss die Einschränkung auf reelle Exponenten bei den komplexen Potentialen nach sich zieht. Dabei wird ein weitreichender und nach Kenntnis des Autors neuer Zusammenhang zwischen den beiden Vorgehensweisen herausgearbeitet, nach dem für eine große Klasse von Multi-Materialkonfigurationen die gleiche Koeffizientenmatrix und damit die gleichen Eigenwerte λ resultieren. Im darauf folgenden Abschnitt 3.4 wird die Gestalt der Spannungs- und Verschiebungsfelder bei Verwendung von Potentialen mit komplexwertigem Exponent angegeben.

Ansätze, die auf der a priori Annahme $\lambda \in \mathbb{R}$ basieren, sind zwar für eine reine Studie der Singularitätsordnungen anwendbar, weisen aber offensichtlich einen Mangel an Konsistenz auf. Dieser Mangel zieht Fehler nach sich, sobald komplexe Werte λ ermittelt werden, für die dann auch die zugehörigen Spannungs- oder Verschiebungsfelder explizit bestimmt werden sollen. Ein Wert λ mit $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ führt in diesen Fällen auf komplexwertige Spannungen und Verschiebungen, was nicht akzeptabel ist.

Theocaris kritisiert in seiner Arbeit [82] von 1974, dass in verschiedenen Publikationen mit der implizit oder explizit getroffenen Annahme $\lambda \in \mathbb{R}$ charakteristische Polynome hergeleitet werden, für die dann auch echt komplexe Werte für λ bei der Nullstellensuche zugelassen werden. Er nennt verschiedene Beispiele, wie etwa die Veröffentlichungen von Williams [87], England [30] und Kalandiaa [50]. Aber auch in modernen Arbeiten wie zum Beispiel der Veröffentlichung von Carpinteri [16] von 2006, findet sich die gleiche Problematik. Carpinteri arbeitet mit einem separablen Ansatz für die reelle Airysche Spannungsfunktion (im i -ten Sektor). Dieser Ansatztyp stammt von Wieghardt [85] und

lautet:

$$\begin{aligned}\Phi_i(r, \varphi) &= \sum_j r^{\lambda_j+1} f_{i,j}(\varphi, \lambda_j) \quad \text{mit} \\ f_i(\varphi, \lambda) &= A_i \sin((\lambda+1)\varphi) + B_i \cos((\lambda+1)\varphi) + C_i \sin((\lambda-1)\varphi) + D_i \cos((\lambda-1)\varphi) .\end{aligned}$$

Dabei sind A_i, B_i, C_i, D_i freie Unbekannte, die Eigenwerte λ werden ebenfalls über eine Nullstellensuche eines charakteristischen Polynoms ermittelt. Die verwendete Spannungsfunktion führt zu den folgenden Spannungen (Gleichung (3) bei Carpinteri) im i -ten Sektor

$$\sigma_r^i = r^{\lambda-1} [f_i'' + (\lambda+1)f_i] \quad , \quad \sigma_\varphi^i = r^{\lambda-1} [\lambda(\lambda+1)f_i] \quad , \quad \tau_{r\varphi}^i = r^{\lambda-1} [-\lambda f_i'] \quad ,$$

die für Eigenwerte mit $\text{Im } \lambda \neq 0$ offensichtlich komplexwertige Spannungen liefert. Derartige Eigenwerte liegen bei den Ergebnissen der Studie von Carpinteri in der Tat vor.

In Abschnitt 3.5 sind logarithmische Singularitäten vorgestellt, diskutiert und im Rahmen der komplexen Methode behandelt worden. Dafür mussten die Potentiale aus Abschnitt 3.3 um gewisse Anteile ergänzt werden, was zu einer anderen Art von linearem Gleichungssystem führte. Es ist einerseits demonstriert worden, dass logarithmische Singularitäten von eher akademischer Natur sind, andererseits wurde der Nachweis erbracht, dass für eine große Klasse von Multi-Materialkonfigurationen die gleiche Gestalt des linearen Gleichungssystems resultiert. Nach Wissen des Autors sind diese Erkenntnisse neu. Am Ende von Abschnitt 3.5 ist die Gestalt der Spannungs- und Verschiebungsfelder bei logarithmischen Singularitäten angegeben worden.

Im letzten Abschnitt 3.6 wurden schließlich einige kurze Erläuterungen zu den sogenannten Dundurs-Parametern gegeben.

Kapitel 4

Analyse verschiedener Konfigurationen

Im vorliegenden Kapitel werden die Singularitätsordnungen verschiedener Multi-Materialkonfigurationen mit der in Kapitel 3 entwickelten asymptotischen Methode untersucht. Dabei wird in allen Fällen der ebene Verzerrungszustand zugrunde gelegt. Für die Analysen wird eine im Rahmen dieser Arbeit erstellte Implementation in das Computeralgebrasystem MATHEMATICA verwendet. Der grundsätzliche Analysenablauf ähnelt sich bei allen Konfigurationen sehr stark und wird daher anhand des ersten Beispiels (Bimaterialkerb mit Knick in 4.1) zusammen mit einigen Besonderheiten der Implementation besonders ausführlich geschildert bzw. diskutiert. Im darauf folgenden Abschnitt folgt die Analyse einer speziellen Bimaterialkonfiguration. Dort wird eine Methode vorgestellt, die es erlaubt in vielen Fällen geschlossen-analytische Lösungen zu ermitteln. Danach wird eine Verstärkungspflaster-Stelle betrachtet, wobei eine einfache und wirkungsvolle Maßnahme zur Reduktion der Singularitätsordnung vorgeschlagen wird. Abschließend wird das Aufreißen einer dünnen Schicht auf einem Substrat (Kanalbildung) untersucht. Eine Besonderheit ist, dass in vielen Fällen "Supersingularitäten", also Singularitäten, die stärker als die klassische $\frac{1}{\sqrt{r}}$ - Rissspitzen-Singularität sind, gefunden werden.

4.1 Bimaterialkerb mit Knick

Als erstes Beispiel wird ein Interface-Riss in einer Bimaterialkonfiguration wie in Abbildung 4.1 betrachtet, der etwa bei einer Laminatstruktur mit Knick denkbar ist. Im Grenzfall $\alpha = 0$ handelt es sich dabei um den klassischen Grenzflächenriss.

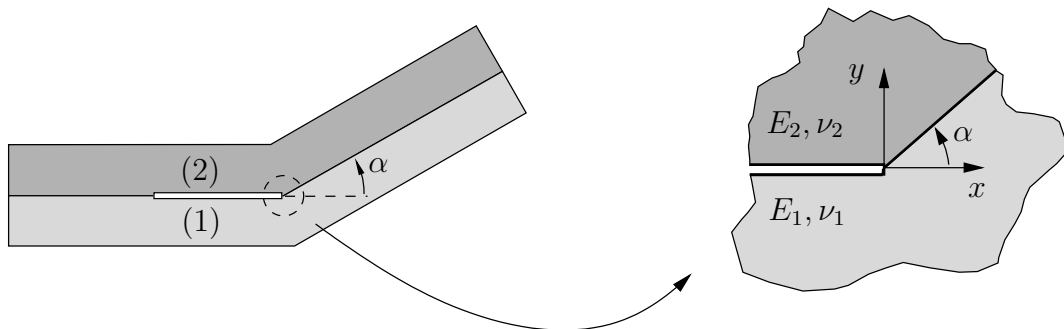


Abbildung 4.1: Bimaterialkerb mit Knick

Es ist zweckmäßig den Verzweigungsschnitt (siehe Abschnitt 3.1) auf die negative reelle Achse zu legen. Dann lauten die Übergangs- und Randbedingungen:

$$a_{11} e^{2i\lambda\alpha} + \bar{a}_{21} \lambda e^{2i\alpha} + \bar{b}_{21} = a_{12} e^{2i\lambda\alpha} + \bar{a}_{22} \lambda e^{2i\alpha} + \bar{b}_{22} , \quad (4.1)$$

$$\bar{a}_{21} e^{-2i\lambda\alpha} + a_{11} \lambda e^{-2i\alpha} + b_{11} = \bar{a}_{22} e^{-2i\lambda\alpha} + a_{12} \lambda e^{-2i\alpha} + b_{12} , \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{\mu_2} \left(\bar{a}_{22} \lambda e^{2i\alpha} + \bar{b}_{22} - \kappa_2 a_{12} e^{2i\lambda\alpha} \right) = \frac{1}{\mu_1} \left(\bar{a}_{21} \lambda e^{2i\alpha} + \bar{b}_{21} - \kappa_1 a_{11} e^{2i\lambda\alpha} \right) , \quad (4.3)$$

$$\frac{1}{\mu_2} \left(a_{12} \lambda e^{-2i\alpha} + b_{12} - \kappa_2 \bar{a}_{22} e^{-2i\lambda\alpha} \right) = \frac{1}{\mu_1} \left(a_{11} \lambda e^{-2i\alpha} + b_{11} - \kappa_1 \bar{a}_{21} e^{-2i\lambda\alpha} \right) , \quad (4.4)$$

$$a_{11} + \bar{a}_{21} \lambda e^{2i\lambda\pi} + \bar{b}_{21} e^{2i\lambda\pi} = 0 , \quad (4.5)$$

$$a_{11} \lambda + \bar{a}_{21} e^{2i\lambda\pi} + b_{11} = 0 , \quad (4.6)$$

$$a_{12} e^{2i\lambda\pi} + \bar{a}_{22} \lambda + \bar{b}_{22} = 0 , \quad (4.7)$$

$$a_{12} e^{2i\lambda\pi} + \bar{a}_{22} \lambda + b_{12} e^{2i\lambda\pi} = 0 . \quad (4.8)$$

Dies lässt sich in Matrizenform auch wie folgt angeben:

$$\begin{bmatrix} e^{2i\alpha\lambda} & \lambda e^{2i\alpha} & 0 & 1 & -e^{2i\lambda\alpha} & -\lambda e^{2i\alpha} & 0 & -1 \\ \lambda e^{-2i\alpha} & e^{-2i\lambda\alpha} & 1 & 0 & -\lambda e^{-2i\alpha} & -e^{-2i\lambda\alpha} & -1 & 0 \\ \frac{\kappa_1}{\mu_1} e^{2i\lambda\alpha} & -\frac{\lambda}{\mu_1} e^{2i\alpha} & 0 & -\frac{1}{\mu_1} & -\frac{\kappa_2}{\mu_2} e^{2i\lambda\alpha} & \frac{\lambda}{\mu_2} e^{2i\alpha} & 0 & \frac{1}{\mu_2} \\ -\frac{\lambda}{\mu_1} e^{-2i\alpha} & \frac{\kappa_1}{\mu_1} e^{-2i\lambda\alpha} & -\frac{1}{\mu_1} & 0 & \frac{\lambda}{\mu_2} e^{-2i\alpha} & -\frac{\kappa_2}{\mu_2} e^{-2i\lambda\alpha} & \frac{1}{\mu_2} & 0 \\ 1 & \lambda e^{2i\lambda\pi} & 0 & e^{2i\lambda\pi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & e^{2i\lambda\pi} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{2i\lambda\pi} & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda e^{2i\lambda\pi} & 1 & e^{2i\lambda\pi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ \bar{a}_{21} \\ b_{11} \\ \bar{b}_{21} \\ a_{12} \\ \bar{a}_{22} \\ b_{12} \\ \bar{b}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (4.9)$$

Für nichttriviale Lösungen muss die Koeffizientendeterminante von (4.9) identisch Null sein. Dies führt nach einer Reihe von Vereinfachungen auf die charakteristische Gleichung:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{B} &= \frac{1}{\mu_1^2 \mu_2^2} e^{-4i(1+\lambda)\alpha} \left[e^{4i\lambda(\pi+\alpha)} (e^{2i\alpha} - 1)^4 \lambda^4 (\mu_1 - \mu_2)^2 - e^{4i\alpha} \right. \\ &\quad \cdot \left\{ (-1 + e^{2i\lambda(\pi+\alpha)})^2 \left((e^{4i\lambda\pi} + e^{4i\lambda\alpha}) \kappa_2 + e^{2i(\pi+\alpha)\lambda} (1 + \kappa_2^2) \right) \mu_1^2 + 2e^{2i\lambda(\pi+\alpha)} \mu_1 \mu_2 \right. \\ &\quad \cdot (e^{2i\lambda\alpha} - e^{2i\lambda\pi} + e^{2i(2\pi+\alpha)\lambda} - e^{2i\lambda(\pi+2\alpha)}) \left(\cos(2\lambda\alpha)(\kappa_1 + \kappa_2) + \cos(2\lambda\pi) \right. \\ &\quad \cdot (1 + \kappa_1 \kappa_2) \Big) - 4e^{4i\lambda(\pi+\alpha)} \sin((\pi - \alpha)\lambda)^2 (1 + 2\cos(2(\pi + \alpha)\lambda)\kappa_1 + \kappa_1^2) \mu_2^2 \Big\} \\ &\quad + e^{2i\lambda(\alpha+(\pi+\alpha))} (e^{2i\alpha} - 1)^2 \lambda^2 \left\{ (\mu_1 - \mu_2) \left(((e^{4i\lambda\pi} + e^{4i\lambda\alpha}) \kappa_2 - 1) \mu_1 \right. \right. \\ &\quad + (e^{4i\lambda\pi} + e^{4i\lambda\alpha} - \kappa_1) \mu_2 \Big) - e^{4i\lambda(\pi+\alpha)} (\mu_1 - \mu_2) (\mu_1 + \kappa_1 \mu_2) \\ &\quad \left. \left. + e^{2i(\pi+\alpha)\lambda} \left((3 + \kappa_2^2) \mu_1^2 - 2(3 + \kappa_1 \kappa_2) \mu_1 \mu_2 + (3 + \kappa_1^2) \mu_2^2 \right) \right\} \right] \stackrel{!}{=} 0 . \quad (4.10) \end{aligned}$$

Diese transzendente Gleichung lässt sich nicht auf analytische Weise lösen und daher werden die Nullstellen bzw. Eigenwerte λ mit numerischen Methoden gewonnen. Die

Nullstellensuche hat sich bei allen in dieser Arbeit betrachteten Beispielen als schlechtkonditioniertes Problem herausgestellt. Das in MATHEMATICA implementierte Newton-Verfahren (Befehl: FindRoot) ist mit den Standard-Einstellungen nur in wenigen Fällen in der Lage, eine Lösung zu finden. Nach sorgfältiger Optimierung verschiedener Einstellungen wie z.B. der relativen Toleranz und der verwendeten Mindeststellenanzahl bei Zwischenrechnungen ist es jedoch möglich, eine stabile Nullstellensuche durchzuführen.

Es sei vorweggenommen, dass es sich bei allen untersuchten Fällen zeigte, dass die Variation der Querkontraktionszahlen in den technisch relevanten Bereichen $0 < \nu_1, \nu_2 < 0.5$ kaum einen Einfluss auf die Singularitätsordnungen hat. Ein Nachweis darüber wird in Abschnitt 4.2.3 gegeben. Daher wird für die Querkontraktionszahlen in allen folgenden Diagrammen zum Bimaterialkerb $\nu_1 = \nu_2 = 0.2$ zugrunde gelegt.

4.1.1 Bimaterialkerb mit Knick und festem Verhältnis der Steifigkeiten

In den Abbildungen 4.2 - 4.4 sind die Eigenwerte λ als Funktion des Winkels α für verschiedene Steifigkeitsverhältnisse ($\eta := E_2/E_1 = 2, 5, 10, 50, 100, 10^3$) dargestellt, wobei in jedem Plot die betrachtete Konfiguration abgebildet und die Materialdaten angegeben sind. Im Hinblick auf das Abklingverhalten der Spannungen von der Art $\sigma_{ij} \sim r^{\text{Re } \lambda - 1}$ sei an Abschnitt 3.4 erinnert. Demgemäß können die Ordinaten-Werte $\text{Re } \lambda = 1$ bzw. $\text{Re } \lambda = 0$ einem nichtsingulären bzw. einem stark singulären (vom Typ r^{-1}) Verhalten der Spannungen zugeordnet werden, und $\text{Re } \lambda = 0.5$ entspricht gerade der "klassischen" $r^{-1/2}$ - Risspitzen-Singularität. Kurvenverläufe der Realteile in der oberen bzw. unteren Hälfte weisen daher auf schwächere bzw. stärkere Singularitäten als der gemeinen $r^{-1/2}$ - Singularität hin. In allen Fällen liegen reelle und komplexe Eigenwerte vor, wobei bei letzteren zu beachten ist, dass diese stets als ein Paar komplex-konjugierter Werte auftreten. Dabei wird in den Abbildungen nur der Wert mit positivem Imaginärteil dargestellt. Der untere reelle Pfad beginnt (bei $\alpha = -\pi$) und endet (bei $\alpha = \pi$) jeweils mit dem Wert $\lambda = \frac{1}{2}$. Dies entspricht der Erwartung, da es sich in diesen Grenzfällen gerade um einen klassischen Riss in einem homogenen Material 2 bzw. 1 handelt. Es ist bemerkenswert, dass bereits bei dieser einfachen Konfiguration Singularitäten auftreten können, die stärker als die gemeine $r^{-1/2}$ - Singularität sind.

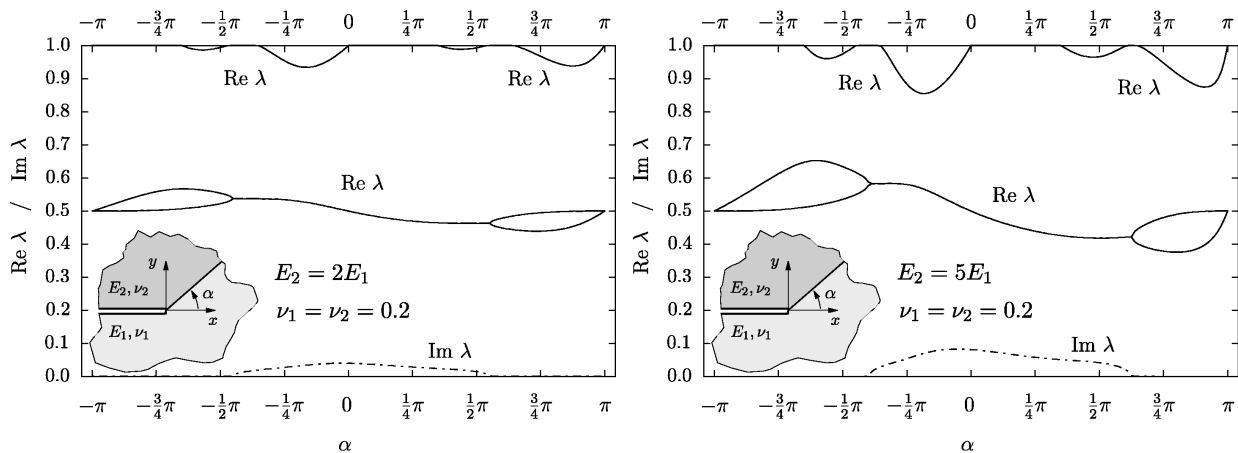
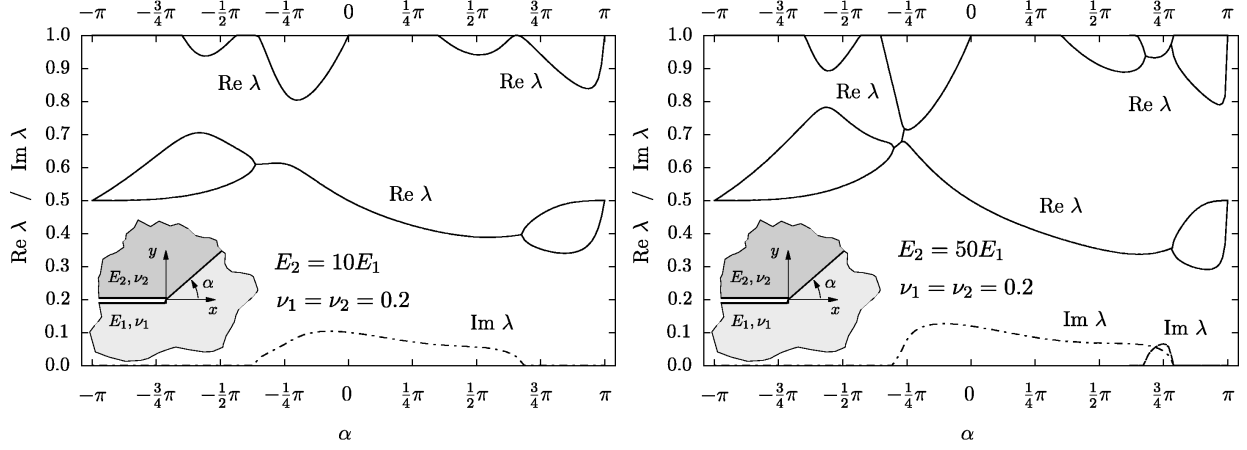
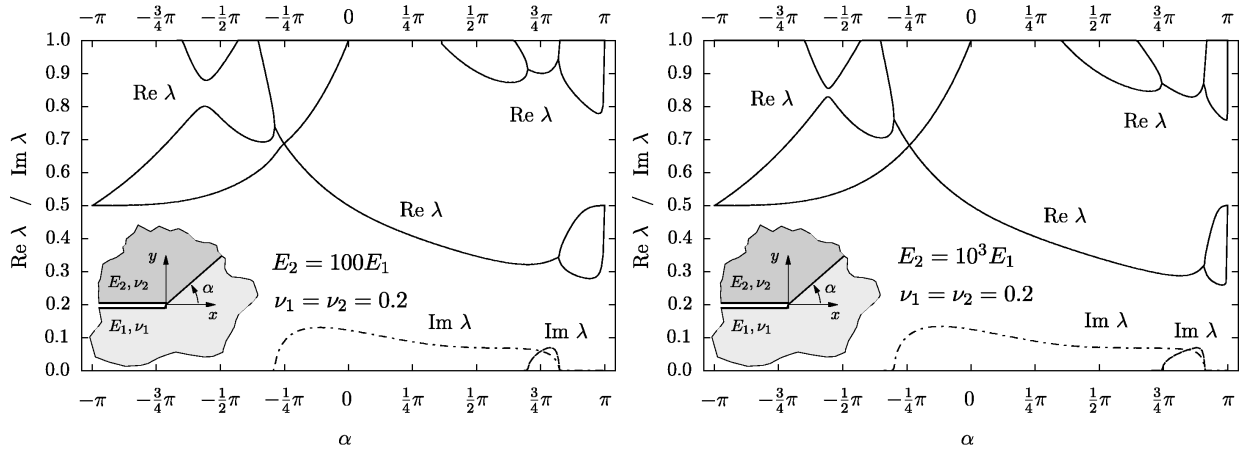


Abbildung 4.2: Eigenwerte der abgebildeten Konfigurationen als Funktion des Winkels α

Abbildung 4.3: Eigenwerte der abgebildeten Konfigurationen als Funktion des Winkels α Abbildung 4.4: Eigenwerte der abgebildeten Konfigurationen als Funktion des Winkels α

Weiterhin finden sich in allen Abbildungen auch logarithmische Singularitäten, die für den Fall $E_2 = 2E_1$ (Abbildung 4.2 links) diskutiert werden sollen. Wie in Abschnitt 3.5 ausgeführt zeigt Dempsey [25], dass logarithmische Singularitäten typischerweise an Übergangsstellen auftreten, an denen eine doppelte reelle Nullstelle vorliegt, die Regionen mit reellen und komplexen Eigenwerten separiert. Bei den oberen Ästen bzw. Kurven ($\text{Re } \lambda > 0.9$) handelt es sich um reellwertige einfache Nullstellen ohne eine logarithmische Singularität. Beim unteren Kurvenverlauf dagegen liegen zwei Stellen mit logarithmischen Singularitäten vor. Diese befinden sich in der Nähe von $-\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{1}{2}\pi$ und sind daran zu erkennen, dass zwei Pfade mit reellen Eigenwerten sich zu einer doppelten reellen Nullstelle vereinigen und in ein Paar komplex-konjugierter Eigenwerte übergehen, von denen - wie zuvor angemerkt - in der Abbildung nur der positive Imaginärteil angegeben wird.

Die Signifikanz von logarithmischen Singularitäten wurde bereits in Abschnitt 3.5 diskutiert. Bei den Übergangsstellen handelt es sich stets um isolierte Punkte (hier: diskrete Werte von η). In direkter Umgebung dieser isolierten Stellen finden sich immer Eigenwerte, die eine stärkere gewöhnliche Singularität nach sich ziehen. Die doppelte Nullstelle in der Nähe von $\frac{1}{2}\pi$ soll nun genauer betrachtet werden, wobei für das charakteristische Polynom abkürzend $D := \det \mathbf{B}$ verwendet wird. Zunächst werden einige Werte-Paare (η, λ) , die sich durch unterschiedliche Genauigkeit voneinander unterscheiden, für diese Stelle in das charakteristische Polynom $D = D(\eta, \lambda)$ eingesetzt:

$$\begin{aligned}
D(1.7, 0.5) &= 5.927 + 3.52282 \cdot 10^{-14} i, \\
D(1.73, 0.46) &= 0.0802952 - 0.0441426 i, \\
D(1.737, 0.463) &= 0.0031593 - 0.00158482 i, \\
D(1.737476, 0.463412) &= 3.84772 \cdot 10^{-6} - 1.90529 \cdot 10^{-6} i.
\end{aligned}$$

Auf diese Weise gewinnt man einen deutlichen Eindruck von der schlechten Konditionierung bzw. Sensitivität des Nullstellenproblems. Um zum Beispiel zu Werten $D(\eta, \lambda)$ zu gelangen, die betragsmäßig kleiner als 10^{-20} sind, müssen Eingabedaten (η, λ) mit 23(!) korrekten Nachkommastellen verwendet werden:

$$(\eta, \lambda) = (1.73747672040619449629755, 0.46341202504237169120296).$$

Mit der vorliegenden Implementation lässt sich die betrachtete Nullstelle im Prinzip beliebig genau bestimmen. Darüber hinaus ist es leicht möglich, den Nachweis für die Bedingung (3.70) von Dempsey zu erbringen. Hier liegt der Fall $m = 7$ vor, d.h. der Rang der 8×8 - Koeffizientenmatrix \mathbf{B} aus (4.9) beträgt 7 und der Eigenraum zur doppelten Nullstelle $(\eta, \lambda) = (1.737476..., 0.463412...)$ ist eindimensional. Die algebraische und die geometrische Vielfachheit der Nullstelle sind ungleich, was sozusagen das Charakteristikum der logarithmischen Singularitäten darstellt. Ermittelt man schließlich den zugehörigen Eigenvektor mit MATHEMATICA, so erhält man zunächst den Vektor

$$\begin{bmatrix} 0.31840 + 0.00509i \\ 0.31840 + 0.00449i \\ 0.16350 - 0.07054i \\ 0.16131 + 0.07542i \\ 0.52971 + 0.01594i \\ 0.52995 \\ 0.27053 + 0.11337i \\ 0.27382 - 0.10519i \end{bmatrix}, \text{ der erst auf die korrekte Gestalt } \begin{bmatrix} 0.31844 + 0.00030i \\ 0.31844 - 0.00030i \\ 0.16242 - 0.07299i \\ 0.16242 + 0.07299i \\ 0.52989 + 0.00797i \\ 0.52989 - 0.00797i \\ 0.27221 + 0.10929i \\ 0.27221 - 0.10929i \end{bmatrix}$$

gebracht werden muss, was hier durch Multiplikation mit der folgenden komplexen Konstante erreicht werden kann:

$$e^{-\frac{i}{2}(\text{Arg}(0.3184+0.0051i)+\text{Arg}(0.3184+0.0045i))}.$$

Wegen der korrekten Gestalt des Eigenvektors sei an die Ausführungen von Abschnitt 3.3 erinnert und die Vektorkomponenten wurden hier aus Platzgründen nur mit 5 Nachkommastellen angegeben. Sie liegen selbstverständlich mit einer deutlich höheren Genauigkeit vor, was für eine sinnvolle Weiterverarbeitung auch nötig ist.

Mit den Eigenvektoren ist es schließlich auch möglich, die zugehörigen Spannungs- und Verschiebungsfelder mithilfe der Gleichungen (3.44) - (3.48) zu ermitteln. Auf eine explizite Angabe dieser Felder, sowie der Größen \mathbf{B} , \mathbf{G} , \mathbf{a} , $\tilde{\mathbf{a}}$ (siehe Abschnitt 3.5 über logarithmische Singularitäten) soll hier verzichtet werden, da es sich um äußerst lange Ausdrücke handelt und dabei kein weiterer Erkenntnisgewinn erzielt wird.

4.1.2 Bimaterialkerb mit Knick und festem Winkel

Nun wird der Fall betrachtet, dass für den Winkel α ein fester Wert vorgegeben ist und die Eigenwerte λ als Funktion des Verhältnisses $\eta := E_2/E_1$ der Steifigkeiten aufgefasst werden. In Abbildung 4.5 sind die Verläufe der Eigenwerte für $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$ und $\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$ dargestellt, wobei für die Querkontraktionszahlen weiterhin $\nu_1 = \nu_2 = 0.2$ gilt.

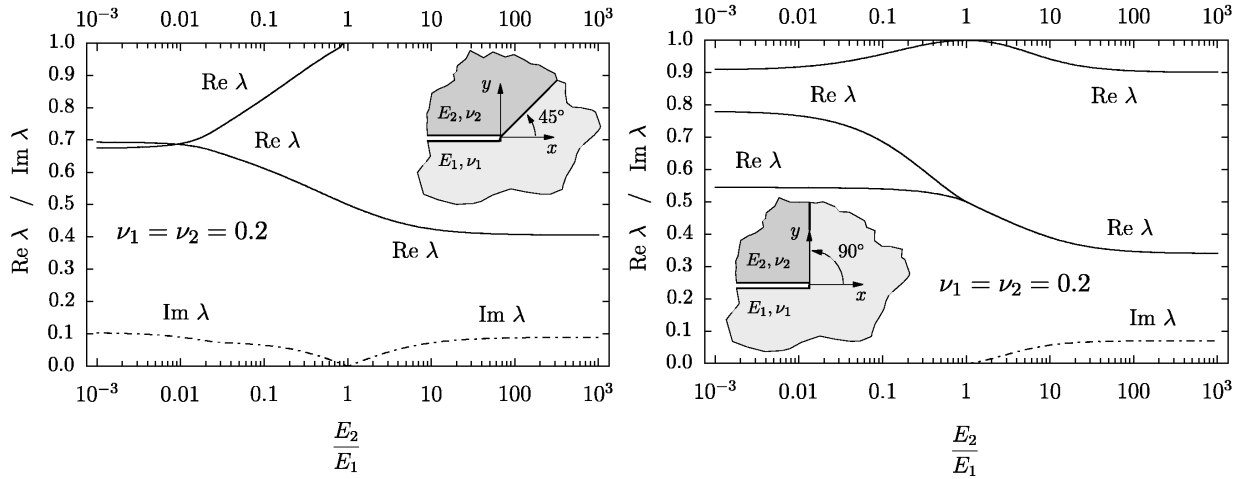


Abbildung 4.5: Eigenwerte der abgebildeten Konfigurationen als Funktion des modularen Verhältnisses E_2/E_1

Die bei $\alpha = 45^\circ$ (Abbildung 4.5 links) abgebildeten Imaginärteile gehören zu dem Realteil, der für kleine bzw. hohe Werte von $\eta = \frac{E_2}{E_1}$ gegen 0.7 bzw. 0.4 strebt und weisen auf komplex-konjugierte Paare von Eigenwerten hin, die sich im Falle $\eta = \frac{E_2}{E_1} = 1$ anscheinend zu einer doppelten reellen Nullstelle vereinen.

Diese Stelle soll genauer betrachtet werden. Zunächst nimmt die charakteristische Gleichung (4.10) für $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\nu_1 = \nu_2 = \frac{2}{10}$, $\eta = \frac{E_2}{E_1}$ die Gestalt

$$\begin{aligned}
 0 \stackrel{!}{=} & -\frac{288e^{4i\lambda\pi}}{625E_1^2\eta^2} \left[\left(73 - 25\lambda^2 + 55 \cos\left(\frac{3\lambda\pi}{2}\right) \right) \left(2\lambda^2 - 2 + 2 \cos\left(\frac{5\lambda\pi}{2}\right) \right) \right. \\
 & + \eta \left\{ 36 - 392\lambda^2 + 100\lambda^4 - 110 \cos(\lambda\pi) + 146 \cos(4\lambda\pi) - 12(3 + 5\lambda^2) \right. \\
 & \quad \cdot \left(\cos\left(\frac{3\lambda\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{5\lambda\pi}{2}\right) \right) \left. \right\} \\
 & + \eta^2 \left\{ 55 \cos(\lambda\pi) + 2(73 - 25\lambda^2) \cos\left(\frac{3\lambda\pi}{2}\right) + 55 \cos(4\lambda\pi) - 2(\lambda^2 - 1) \right. \\
 & \quad \cdot \left(25\lambda^2 - 73 - 55 \cos\left(\frac{5\lambda\pi}{2}\right) \right) \left. \right\} \left. \right] =: -\frac{288e^{4i\lambda\pi}}{625E_1^2\eta^2} D(\eta, \lambda) \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

an, wobei hier bei der Definition von $D(\eta, \lambda)$ der Vorfaktor der eckigen Klammern entfernt wurde, da dieser bei der Nullstellensuche keine Rolle spielt. Wegen

$$D\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{\partial D}{\partial \lambda}\left(1, \frac{1}{2}\right) = 0$$

handelt es sich in der Tat um eine doppelte Nullstelle. Die Bedingung (3.70) von Dempsey ist hier aber wegen $m = 6$ (m : Rang der zugehörigen Koeffizientenmatrix) nicht erfüllt,

daher liegt keine logarithmische Singularität vor. Die algebraische ist gleich der geometrischen Vielfachheit, da ein zweidimensionaler Eigenraum mit den Eigenvektoren

$$[2 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad 1]^T \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} \frac{2i}{3} & -\frac{2i}{3} & -i & i & \frac{2i}{3} & -\frac{2i}{3} & -i & i \end{bmatrix}^T$$

vorliegt.

Im Fall $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (Abbildung 4.5 rechts) lautet die charakteristische Gleichung nach Abspaltung entsprechender Vorfaktoren, die für die Nullstellensuche irrelevant sind, wie folgt:

$$\begin{aligned} D(\eta, \lambda) := & (50\lambda^2 - 73 - 55 \cos(\lambda\pi)) (4\lambda^2 - 2 + 2 \cos(3\lambda\pi)) \\ & - \eta \left\{ 36 - 784\lambda^2 + 400\lambda^4 - 110 \cos(2\lambda\pi) - 12 \cos(\lambda\pi) (3 + 20\lambda^2 \cos(2\lambda\pi)) \right. \\ & \left. - 36 \cos(3\lambda\pi) + 146 \cos(4\lambda\pi) \right\} \\ & + \eta^2 \left\{ 2 (73 - 50\lambda^2) \cos(\lambda\pi) + 55 \cos(2\lambda\pi) + 55 \cos(4\lambda\pi) \right. \\ & \left. - (4\lambda^2 - 2) (50\lambda^2 - 73 - 55 \cos(3\lambda\pi)) \right\} \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Hier gilt $D(1, \frac{1}{2}) = \frac{\partial D}{\partial \lambda}(1, \frac{1}{2}) = 0$. Demgemäß liegt eine doppelte reelle Nullstelle bei $(\eta = 1, \lambda = \frac{1}{2})$ vor. An dieser Stelle nimmt die Koeffizientenmatrix aus (4.9) die Gestalt

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} i & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -i & \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -i & 1 & 0 & \frac{1}{2} & i & -1 & 0 \\ \frac{132i}{25E_1} & \frac{6}{5E_1} & 0 & -\frac{12}{5E_1} & -\frac{132i}{25E_1} & -\frac{6}{5E_1} & 0 & \frac{12}{5E_1} \\ \frac{6}{5E_1} & -\frac{132i}{25E_1} & -\frac{12}{5E_1} & 0 & -\frac{6}{5E_1} & \frac{132i}{25E_1} & \frac{12}{5E_1} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

an und besitzt den Rang 6. Wegen $\frac{\partial^2 D}{\partial \lambda^2}(1, \frac{1}{2}) = 4096\pi^2 \neq 0$ ist die Bedingung (3.70) von Dempsey nicht erfüllt und es liegt keine logarithmische Singularität vor. Mit dem im Rahmen dieser Arbeit erstellten Programm lässt sich leicht zeigen, dass die algebraische und geometrische Vielfachheit gleich sind, da ein zweidimensionaler Eigenraum mit den Eigenvektoren $[2 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad 1]^T$ und $[\frac{2i}{3} \quad -\frac{2i}{3} \quad -i \quad i \quad \frac{2i}{3} \quad -\frac{2i}{3} \quad -i \quad i]^T$ vorliegt.

In der schon zuvor erwähnten Arbeit [25] weist Dempsey darauf hin, dass logarithmische Singularitäten typischerweise an Stellen auftreten, wo eine doppelte Nullstelle vorliegt, die Regionen von reellen und komplexen Eigenwerten separiert. Der betrachtete Fall zeigt, dass an solchen Stellen *nicht notwendig* eine logarithmische Singularität vorliegen muss und dass im Zweifelsfall eine genauere Untersuchung der Koeffizientenmatrix nötig ist.

Schließlich sei noch angemerkt, dass trotz der widrigen Bedingungen bei der Nullstellensuche die reine Rechenzeit für eine der Abbildungen 4.2 - 4.5 auf einem Standard PC (AMD Athlon 64 X2 Dual Core 6000+ mit 3GHz und 2GB RAM) lediglich ca. 10 Sekunden erfordert.

Der Sonderfall $\alpha = 0$ / Der klassische Grenzflächenriss

Im Fall $\alpha = 0$ liegt der klassische Grenzflächenriss vor, den man auch als Bimaterialriss oder Interface-Riss bezeichnet. Im Folgenden soll kurz skizziert werden, wie sich die Eigenwerte λ ermitteln lassen.

Auch hier können bei der Koeffizientendeterminante (4.10) einige Vorfaktoren, die für die Nullstellensuche nicht von Bedeutung sind, abgespalten werden. Nach einer Reihe von Umformungen folgt:

$$\det \mathbf{B} = \left[\left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \kappa_2 + 1 \right) e^{2i\lambda\pi} + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} + \kappa_1 \right) \right] \left[\left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \kappa_2 + 1 \right) e^{-2i\lambda\pi} + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} + \kappa_1 \right) \right]. \quad (4.13)$$

In der Arbeit von Theocaris [82] wird ebenfalls der klassische Grenzflächenriss betrachtet. In eben dieser Arbeit [82] befindet jedoch in der charakteristischen Gleichung (Formel (38)) ein Fehler bei einem Index.

Damit $\det \mathbf{B} = 0$ erfüllt ist, muss offensichtlich (mindestens) eine der beiden eckigen Klammern verschwinden. Die erste eckige Klammer liefert:

$$\begin{aligned} e^{2i\lambda\pi} &= -\frac{\frac{\mu_1}{\mu_2} + \kappa_1}{\frac{\mu_1}{\mu_2} \kappa_2 + 1} \\ \Rightarrow 2i\lambda\pi &= \ln \left(\frac{\mu_2 \kappa_1 + \mu_1}{\mu_1 \kappa_2 + \mu_2} \right) + i\pi \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{1}{2} - i \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{\mu_2 \kappa_1 + \mu_1}{\mu_1 \kappa_2 + \mu_2} \right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Dabei wurde im ersten Schritt der komplexe Logarithmus, genauer der Hauptwert des Logarithmus (vgl. Abschnitt 3.2), angewendet. Die zweite eckige Klammer von (4.13) liefert bei analogem Vorgehen zunächst $\lambda = -\frac{1}{2} + i \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{\mu_2 \kappa_1 + \mu_1}{\mu_1 \kappa_2 + \mu_2} \right)$. Da nur Eigenwerte λ mit $0 < \operatorname{Re} \lambda < 1$ gesucht werden, folgt schließlich mit der $2\pi i$ -Periodizität der komplexen Exponentialfunktion, dass der zweite Wert $\lambda = \frac{1}{2} + i \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{\mu_2 \kappa_1 + \mu_1}{\mu_1 \kappa_2 + \mu_2} \right)$ lautet. Damit liegt schließlich das komplex-konjugierte Paar von Eigenwerten

$$\lambda = \frac{1}{2} \pm i \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{\mu_2 \kappa_1 + \mu_1}{\mu_1 \kappa_2 + \mu_2} \right) \quad (4.15)$$

vor.

Die dabei auftretende Größe $i \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{\mu_2 \kappa_1 + \mu_1}{\mu_1 \kappa_2 + \mu_2} \right)$ wird auch *Bimaterialkonstante* genannt.

Abschließend sei bemerkt, dass die *Bimaterialkonstante* mit Hilfe der Dundurs-Parameter

$$\delta^D = \frac{\frac{\mu_2}{\mu_1} \kappa_1 + 1}{\kappa_2 + 1} \quad \text{und} \quad \eta^D = \frac{\frac{\mu_2}{\mu_1} + \kappa_2}{\kappa_2 + 1}$$

aus Abschnitt 3.6 der vorliegenden Arbeit die einfache Form $i \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{\delta^D}{\eta^D} \right)$ annimmt.

4.1.3 Punktweise geschlossen-analytische Lösungen

In allen dem Autor bekannten Studien und Arbeiten, die sich mit der Bestimmung von Singularitätsordnungen bei ebenen Multi-Materialkonfigurationen beschäftigen, wird die Nullstellensuche des charakteristischen Polynoms bzw. der Koeffizientendeterminante numerisch durchgeführt, so auch in dieser Arbeit. Weil einerseits die charakteristische Gleichung $D(\eta, \lambda) = 0$ in geschlossener Form vorliegt - d.h. bei keinem Wert handelt es sich um eine gerundete Zahl oder eine Näherungsgröße - und andererseits die zuvor beschriebene numerische Nullstellensuche im Prinzip mit beliebiger Genauigkeit betrieben werden kann, sollte es gerechtfertigt sein, von einem analytischen Charakter zu sprechen.

Es besteht jedoch eine weitere und bemerkenswert einfache Möglichkeit zu einigen **geschlossen-analytischen Lösungen** von $D(\eta, \lambda) = 0$ zu gelangen. Bei der betrachteten Bimaterialkonfiguration stellt die Gleichung $D(\eta, \lambda) = 0$ trotz ihrer Komplexität eine einfache quadratische Gleichung in η dar, und wenn man einen Wert für λ vorgibt, muss lediglich eine quadratische Gleichung gelöst werden, deren Koeffizienten komplexwertig sein können. Dies soll am zuvor betrachteten Fall ($\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\nu_1 = \nu_2 = \frac{2}{10}$, $\eta = \frac{E_2}{E_1}$) für die Werte $\lambda = \frac{6}{10}, \frac{7}{10}, \frac{8}{10}$ demonstriert werden. Zunächst erhält man

$$\begin{aligned} D\left(\eta, \frac{6}{10}\right) &= \frac{77}{2} - \frac{176}{\sqrt{5}} + (243 - 64\sqrt{5})\eta + \left(\frac{77}{2} + \frac{176}{\sqrt{5}}\right)\eta^2, \\ D\left(\eta, \frac{7}{10}\right) &= \frac{1}{50} \left[97 + 1375\sqrt{5} - 5\sqrt{588365 + 128222\sqrt{5}} \right. \\ &\quad \left. + \eta \left(15806 + 450\sqrt{5} + 2370\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \eta^2 \left(97 + 1375\sqrt{5} + 5\sqrt{588365 - 106882\sqrt{5}} \right) \right], \\ D\left(\eta, \frac{8}{10}\right) &= \frac{1}{50} \left(1637 - 640\sqrt{5} + 2 \left(6363 + 1600\sqrt{5} \right) \eta + \left(1637 + 640\sqrt{5} \right) \eta^2 \right), \end{aligned}$$

wobei ausdrücklich darauf hingewiesen sei, dass es sich bei keinem der Koeffizienten um eine gerundete Dezimalzahl handelt, sondern dass hier in der Tat ausschließlich analytische Terme vorliegen. Die Lösungen lauten

$$\begin{aligned} \eta_{1/2}^{\lambda=\frac{6}{10}} &= \frac{-1215 + 320\sqrt{5} \pm 24\sqrt{4270 - 1350\sqrt{5}}}{385 + 352\sqrt{5}} \approx \{0.29820, -1.15044\}, \\ \eta_{1/2}^{\lambda=\frac{7}{10}} &= \frac{1}{4 \left(97 + 1375\sqrt{5} + 5\sqrt{588365 - 106882\sqrt{5}} \right)} \\ &\quad \cdot \left[-4 \left(7903 + 225\sqrt{5} + 1185\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \right) \right. \\ &\quad \left. \pm 160\sqrt{38085 + 3978\sqrt{5} + 2370\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}} \right] \approx \{0.07917, -3.10418\}, \\ \eta_{1/2}^{\lambda=\frac{8}{10}} &= -\frac{6363 + 1600\sqrt{5} \pm 40\sqrt{6(5485 + 2121\sqrt{5})}}{1637 + 640\sqrt{5}} \approx \{-6.4697, -0.01037\}, \end{aligned}$$

wobei im Rahmen dieser Arbeit die negativen Werte für η nicht weiter betrachtet werden sollen. Daher wird in den beiden ersten Fällen $\eta_{1/2}^{\lambda=\frac{6}{10}}$ und $\eta_{1/2}^{\lambda=\frac{7}{10}}$ jeweils der zweite Wert ausgeschlossen und im dritten Fall $\eta_{1/2}^{\lambda=\frac{8}{10}}$ liegen nur negative Werte und damit keine Lösung vor.

Der Vollständigkeit wegen sei darauf hingewiesen, dass derartige negative Werte in der Tat auftreten können, auch wenn sie auf den ersten Blick physikalisch nicht sinnvoll erscheinen mögen. In diesem Zusammenhang sei ohne weitere Ausführungen auf die Veröffentlichung von Ericksen [32] bzw. das Buch von Ericksen [33] verwiesen, in denen Materialinstabilitäten untersucht werden, bei denen (lokal) negative Steifigkeiten vorliegen können.

Die beschriebene Methode ist nur für reelle Werte von λ praktisch anwendbar und daher für die Erstellung eines kompletten Diagramms in der Regel nicht geeignet. Sie kann aber bei der Suche nach geeigneten Startpunkten für das Newton-Verfahren eine wertvolle Hilfe sein. Die Möglichkeit punktweise geschlossen-analytische Lösungen zu ermitteln ist nach Wissen des Autors neu bzw. bislang nicht publiziert worden.

Darüber hinaus können die hier punktweise ermittelten Lösung zu einer kompletten Funktion $\eta = \eta(\lambda)$ ausgeweitet werden. Da dies im vorliegenden Fall auf äußerst unübersichtliche Ausdrücke führt, sei auf Abschnitt 4.2.2 verwiesen. Dort wird am Beispiel einer anderen Bimaterialkonfiguration demonstriert, wie geschlossen-analytische Lösungen der Form $\eta = \eta(\lambda)$ hergeleitet werden können.

4.2 Eine spezielle Bimaterialkonfiguration

Als nächstes Beispiel wird die Bimaterialkonfiguration aus Abbildung 4.6 betrachtet. Diese besteht aus zwei Materialien, ist achsensymmetrisch und besitzt einen Riss in Material 2 entlang der Symmetrieachse.

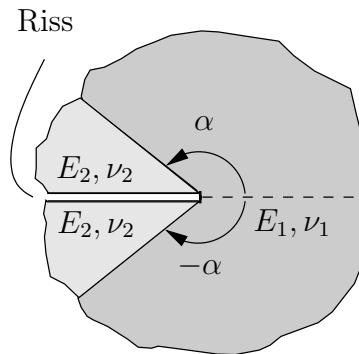


Abbildung 4.6: Eine spezielle Bimaterialkonfiguration

Die Übergangs- und Randbedingungen führen auf ein lineares homogenes Gleichungssystem $\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$, wobei hier 3 Sektoren vorliegen und daher eine 12×12 -Koeffizientenmatrix \mathbf{B} resultiert. Auf eine explizite Angabe des linearen Gleichungssystems soll verzichtet werden. Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass es hier zweckmäßig ist, den Verzweigungsschnitt auf die negative reelle Achse zu legen. Dann sind die lastfreien Rissufer durch $\varphi = \pi$ und $\varphi = -\pi$ gegeben und die beiden Materialien sind entlang der Interfaces $\varphi = \alpha$ und $\varphi = -\alpha$ miteinander verbunden.

Mit $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ (damit $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$) und dem modularen Verhältnis $\eta = \frac{E_2}{E_1}$ kann nach einigen algebraischen Vereinfachungen eine multiplikative Zerlegung des charakteristischen Polynoms $\det \mathbf{B} = \det \mathbf{B}^I \cdot \det \mathbf{B}^{II}$ angegeben werden:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{B}^I = & \left[(\eta - 1)^2 \left(\kappa \sin(2(2\alpha - \pi)\lambda) - 8\lambda^3 \cos(\alpha) \sin^3(\alpha) \right) + (\eta + \kappa)(1 + \eta\kappa) \sin(2\pi\lambda) \right. \\ & - (\eta - 1) \left(2(\eta + \kappa)\lambda \cos(2(\pi - \alpha)\lambda) \sin(2\alpha) + 2 \cos(2\alpha) \sin(2\alpha\lambda)(1 + \eta\kappa)\lambda^2 \right. \\ & \left. \left. + \lambda(1 - 2\eta + \kappa^2) \sin(2\alpha) + (1 + 2\eta\kappa + \kappa^2 - 2(1 + \eta\kappa)\lambda^2) \right. \right. \\ & \left. \left. \cdot \sin(2\alpha\lambda) \right) \right] (1 + \kappa), \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \det \mathbf{B}^{II} = & \left[4i e^{-2i\alpha\lambda} \left((\eta + \kappa)\lambda \cos(2(\pi - \alpha)\lambda) \sin(2\alpha) - (1 + \eta\kappa)\lambda^2 \cos(2\alpha) \sin(2\alpha\lambda) \right) \right. \\ & + e^{-2i\alpha(1+\lambda)} (e^{4i\alpha} - 1) \lambda (1 + \kappa^2 - 2\lambda^2 + 2\eta(\lambda^2 - 1)) + (1 - e^{-4i\alpha\lambda}) \\ & \left. \cdot (2\lambda^2 - 1 - \kappa^2 + 2\eta\kappa(\lambda^2 - 1)) \right] (\eta - 1) + e^{-2i(\pi+\alpha)\lambda} (e^{4i\pi\lambda} - 1) (\eta + \kappa)(1 + \eta\kappa) \\ & + e^{-2i(\pi\lambda+\alpha(2+3\lambda))} (\eta - 1)^2 \left(e^{4i\alpha} (e^{8i\alpha\lambda} - e^{4i\pi\lambda}) \kappa - e^{2i(\pi+2\alpha)\lambda} (e^{8i\alpha} - 1) \lambda^3 \right). \end{aligned} \quad (4.17)$$

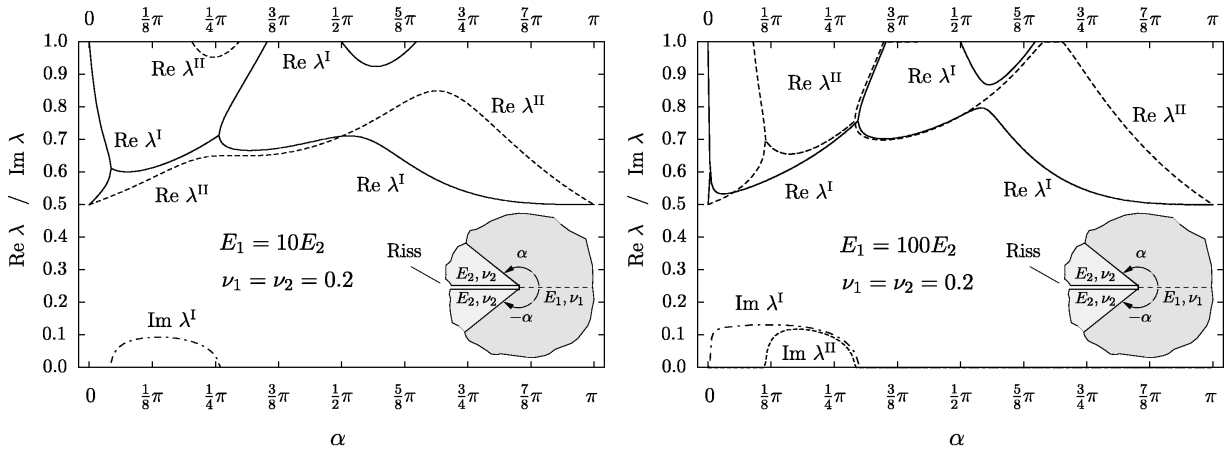
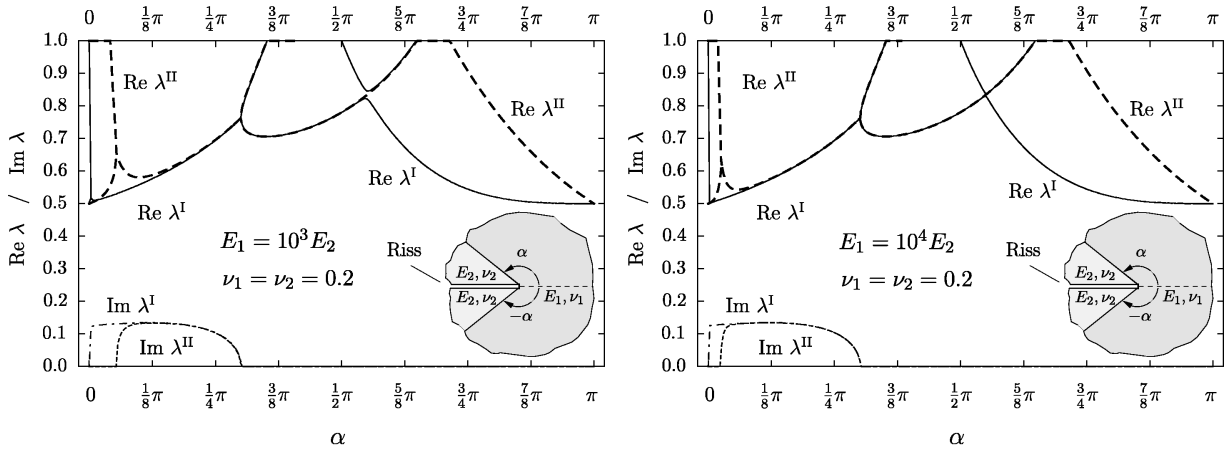
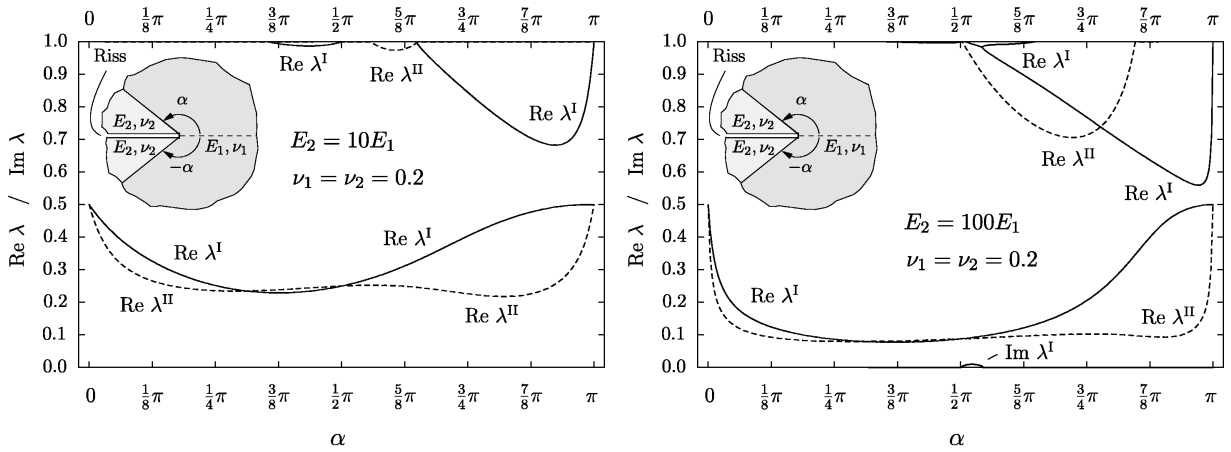
Die Anteile mit höchstem Index I bzw. II entsprechen dabei einem symmetrischen bzw. antisymmetrischen Anteil bezüglich der x -Achse, wie er sich bei einer Modus I - bzw. Modus II -Rissöffnung einstellt. Die verschiedenen Rissöffnungsarten wurden in Abschnitt 2.4 erläutert. Durch die Unterteilung in Modus I und Modus II ist es ferner leicht einzusehen, dass nicht zwingend jeder abgebildete Pfad bzw. Eigenwert λ in den folgenden Diagrammen einen Beitrag zum singulären Spannungsfeld leisten muss. Man denke etwa an eine geeignete äußere Belastung, die lediglich einen symmetrischen Anteil hervorruft.

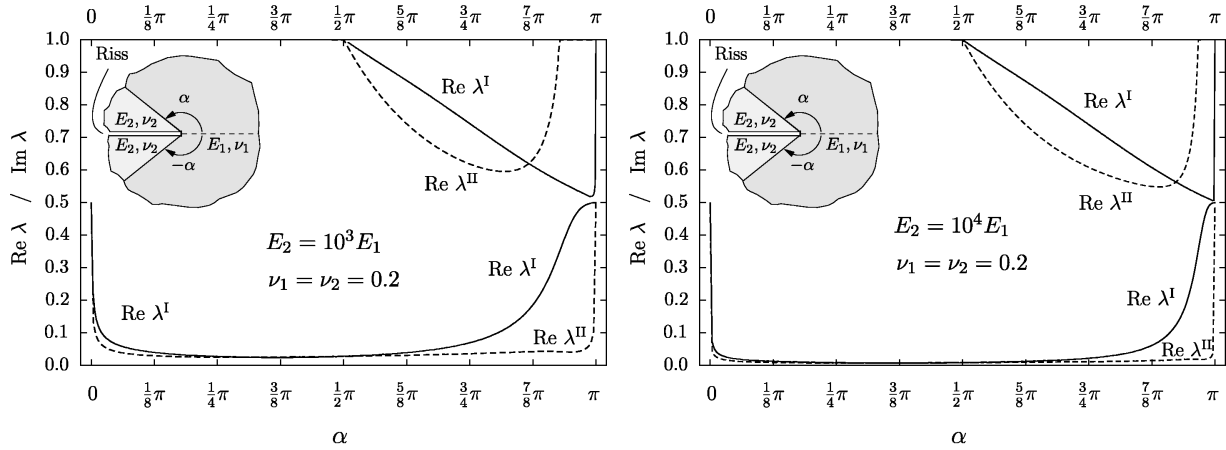
4.2.1 Eigenwertverteilung als Funktion des Winkels

In den Abbildungen 4.7 - 4.10 sind die Eigenwertverteilungen für verschiedene modulare Verhältnisse $\frac{E_2}{E_1}$ als Funktion des Winkels α dargestellt. Dabei wird in allen Fällen für die Querkontraktionszahlen $\nu_1 = \nu_2 = \frac{2}{10}$ gesetzt, und sämtliche Kurvenverläufe sind durch numerische Nullstellensuche von $\det \mathbf{B}^I = 0$ bzw. $\det \mathbf{B}^{II} = 0$ ermittelt worden.

Die Abbildungen 4.7 - 4.8 beziehen sich auf die Steifigkeitsverhältnisse $E_1 = 10E_2$, $E_1 = 100E_2$, $E_1 = 10^3E_2$, $E_1 = 10^4E_2$, d.h. der Riss liegt im weicheren Material. In den Abbildungen 4.9 - 4.10 befindet sich der Riss im steiferen Material, wobei hier die Fälle $E_2 = 10E_1$, $E_2 = 100E_1$, $E_2 = 10^3E_1$, $E_2 = 10^4E_1$ zugrunde liegen.

In allen Abbildungen 4.7 - 4.10 führen die Grenzfälle $\alpha = 0$ und $\alpha = \pi$ auf singuläre Spannungen vom Typ $\sigma \sim r^{-1/2}$. Das entspricht der Erwartung, da für $\alpha = 0$ bzw. $\alpha = \pi$ ein (klassischer) Riss im homogenen Material 2 bzw. 1 vorliegt.

Abbildung 4.7: Eigenwerte der abgebildeten Konfigurationen als Funktion des Winkels α Abbildung 4.8: Eigenwerte der abgebildeten Konfigurationen als Funktion des Winkels α Abbildung 4.9: Eigenwerte der abgebildeten Konfigurationen als Funktion des Winkels α

Abbildung 4.10: Eigenwerte der abgebildeten Konfigurationen als Funktion des Winkels α

Wenn der Riss sich im weicheren Material befindet, liegen offensichtlich keine Supersingularitäten vor. Bei einem Riss im steiferen Material dagegen lassen sich in allen betrachteten Fällen Supersingularitäten finden, die sich über den kompletten Winkelbereich erstrecken. Für große Werte von $\frac{E_2}{E_1}$ werden die Singularitäten immer stärker, sie streben gegen den Grenzfall $\sigma \sim r^{-1}$, der aber nicht erreicht wird. Schon für $E_2 = 10E_1$ liegen Singularitäten vor, die deutlich stärker als die klassische $r^{-1/2}$ -Rissspitzen-Singularität sind.

Angesichts der einfachen Geometrie dürfen diese Ergebnisse durchaus als überraschend angesehen werden. Überraschend, weil in vielen Lehrbüchern und Skripten zur Mechanik bzw. Bruchmechanik der Eindruck vermittelt wird, dass es bei elastischen Rissproblemen nur eine Art von Spannungsverhalten - nämlich von der typischen Art $r^{-1/2}$ - gibt und ansonsten lediglich harmlosere Singularitäten vorliegen, es sei denn es liegen Einzelkraft-Probleme vor. Dieser Eindruck entsteht nicht zuletzt, weil auch bei einem gekrümmten Riss im homogenen Material sowie im Falle des gewöhnlichen Bimaterialkerbs (ohne Knick) das gleiche singuläre Verhalten der Art $r^{-1/2}$ vorliegt. Hahn [43] etwa schreibt in seinem Lehrbuch über Bruchmechanik: "Die Singularität der Spannungsfelder in Rissnähe wird durch das für alle elastischen Rißprobleme kennzeichnende Glied $1/\sqrt{r}$ beschrieben".

Im Fokus dieser Arbeit stehen einige Beiträge zur asymptotischen Nahfeldanalyse an ebenen Multi-Materialstellen mit der komplexen Methode. Eine Diskussion bruchmechanischer Fragestellungen im Zusammenhang mit Supersingularitäten kann im Rahmen dieser Arbeit nicht geführt werden. Dennoch sollen einige Anmerkungen zum sogenannten J -Integral gegeben werden. Letzteres wird in der linearen Bruchmechanik neben den K -Faktoren und der Energiefreisetzungsrate G (die auf einen infinitesimalen Rissfortschritt dA bezogene freigesetzte Energie) zur Beschreibung des Bruchverhaltens verwendet.

Das J -Integral geht auf Rice [73] zurück, wurde unabhängig davon aber auch von Eshelby [35] und Cherepanov [21] angegeben. Es ist als das Konturintegral

$$J = \int_C \left(U dy - \mathbf{t} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} ds \right)$$

definiert, wobei die Größen U , \mathbf{t} und \mathbf{u} aus Kapitel 2 bekannt sind; es handelt sich um die Formänderungsenergiedichte, den Spannungsvektor und den Verschiebungsvektor. Der Integrationsweg C wird dabei beliebig derart gewählt, dass er um die Rissspitze läuft und an den gegenüberliegenden Ufern startet bzw. endet.

Es lässt sich zeigen, dass das J -Integral bei ebenen Rissproblemen im homogenen Material mit belastungsfreien, geraden Ufern wegunabhängig und damit ein charakteristischer Parameter für den Zustand in der näheren Umgebung der Risspitze ist.

Wenn in der Umgebung der Risspitze singuläre Spannungen vorliegen, die stärker als $r^{-1/2}$ sind, wird das J -Integral wegababhängig und kann insbesondere selbst singulär werden. Dann ist eine sinnvolle Anwendung des J -Integrals bzw. des Griffithschen Bruchkriteriums nicht mehr möglich. Zur Bewertung einer derartigen Situation kann dann beispielsweise ein hybrides Kriterium angewendet werden. Sollte an einer solchen Stelle ein Rissfortschritt eintreten, dann hat der Riss die Möglichkeit sich in ein Interface fortzupflanzen, oder sich in einen Materialsektor auszubreiten. In beiden Fällen liegt dann wieder eine Situation vor, die zur klassischen $r^{-1/2}$ - Singularität und damit auf ein wegunabhängiges J -Integral führt, so dass kein komplettes bzw. katastrophales Durchreißen allein aufgrund des Vorliegens einer stärkeren Singularität auftreten wird. In jedem Fall lautet die Schlussfolgerung, dass derartige Konfigurationen unbedingt vermieden werden sollten.

4.2.2 Geschlossen-analytische Lösungen

Nun soll die Eigenwertverteilung der Bimaterialkonfiguration aus Abbildung 4.6 als Funktion des modularen Verhältnisses $\eta = \frac{E_2}{E_1}$ bei festem Winkel α betrachtet werden. Dabei wird am Beispiel einer speziellen Konfiguration eine Methode gezeigt, mit der es möglich ist den kompletten Kurvenverlauf geschlossen-analytisch zu ermitteln. Die Methode lässt sich leicht auf andere Konfigurationen übertragen und versetzt den Anwender in die Lage in vielen Fällen komplette Kurvenverläufe, oder wenigstens die rein reellen Kurvenäste geschlossen-analytisch zu bestimmen.

Zunächst sind in den Abbildungen 4.11 - 4.12 die Kurvenverläufe für die Winkel $\alpha = 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 170^\circ$ dargestellt, wobei weiterhin $\nu_1 = \nu_2 = \frac{2}{10}$ gilt.

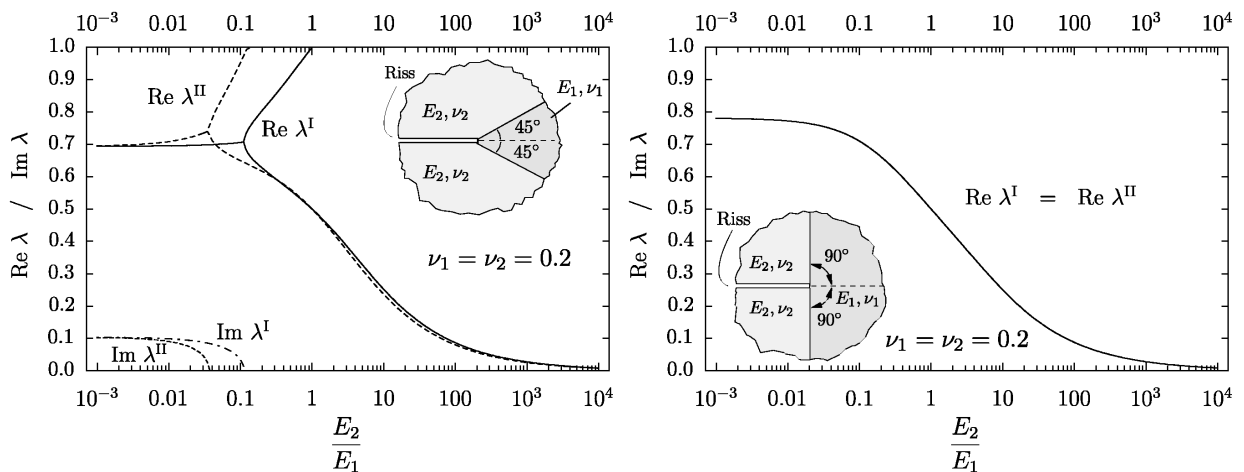


Abbildung 4.11: Eigenwerte der abgebildeten Konfigurationen als Funktion des modularen Verhältnisses E_2/E_1

Wie aus vorigem Abschnitt zu erwarten, zeigt sich in allen Fällen, dass für hinreichend hohe Werte von $\eta = \frac{E_2}{E_1}$ sehr starke Singularitäten erreicht werden.

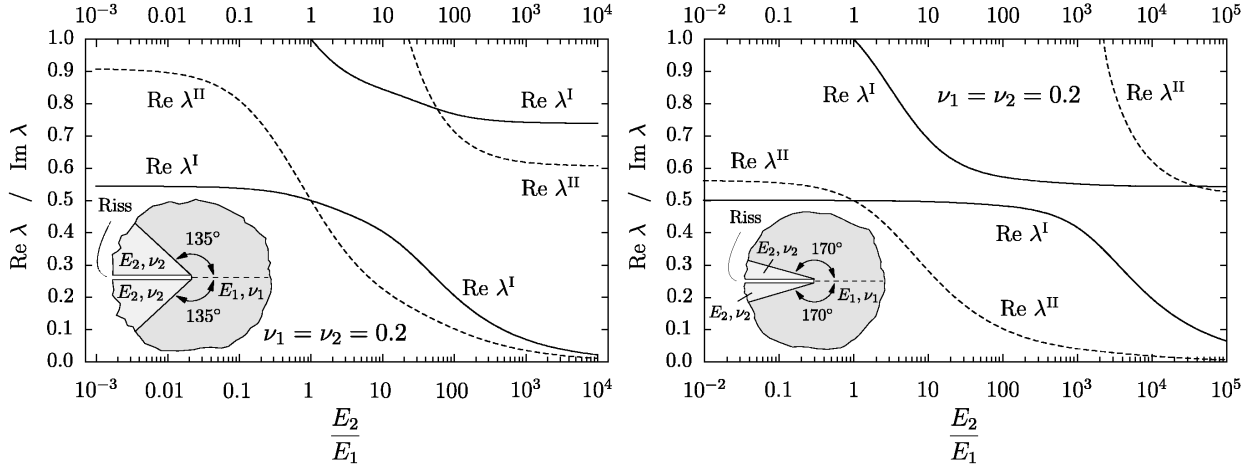


Abbildung 4.12: Eigenwerte der abgebildeten Konfigurationen als Funktion des modularen Verhältnisses E_2/E_1

Nun wird für die Konfiguration $\nu_1 = \nu_2 = \frac{2}{10}$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$ demonstriert, wie der zugehörige Kurvenverlauf in Abbildung 4.11 aus einer geschlossen-analytischen Darstellung gewonnen werden kann.

Mit $\nu_1 = \nu_2 = \frac{2}{10}$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$ lässt sich zeigen, dass die charakteristischen Polynome (4.16) und (4.17) bis auf unterschiedliche Vorfaktoren die gleiche Gestalt besitzen:

$$\det \mathbf{B}^I = \frac{32}{125} \sin(\pi\lambda) D^{\alpha=\frac{\pi}{2}}(\eta, \lambda) \quad \text{und} \quad \det \mathbf{B}^{II} = \frac{4i}{25} e^{-i\pi\lambda} \sin(\pi\lambda) D^{\alpha=\frac{\pi}{2}}(\eta, \lambda), \quad \text{mit}$$

$$D^{\alpha=\frac{\pi}{2}} = \eta^2 (-55 + 110\lambda^2 + 55 \cos(\pi\lambda)) + \eta (-18 - 60\lambda^2 + 146 \cos(\pi\lambda)) + 73 - 50\lambda^2 + 55 \cos(\pi\lambda). \quad (4.18)$$

Die Vorfaktoren sind für die Nullstellensuche irrelevant, daher genügt es $D^{\alpha=\frac{\pi}{2}} \stackrel{!}{=} 0$ zu betrachten. Mit den Funktionen

$$\begin{aligned} f_q(\lambda) &:= (-55 + 110\lambda^2 + 55 \cos(\pi\lambda)), \\ f_l(\lambda) &:= (-18 - 60\lambda^2 + 146 \cos(\pi\lambda)), \\ f_k(\lambda) &:= 73 - 50\lambda^2 + 55 \cos(\pi\lambda) \end{aligned}$$

erhält man die Lösungen in der Form $\eta_{1/2} = \frac{-f_l \pm \sqrt{f_l^2 - 4f_q \cdot f_k}}{2f_q}$.

Negative Werte für das Steifigkeitsverhältnis werden auch hier (vgl. Ausführungen in Abschnitt 4.1.3) ausgeschlossen, und so folgt nach einer Reihe von Vereinfachungen schließlich:

$$\eta = \frac{9 + 30\lambda^2 - 73 \cos(\lambda\pi) - 8\sqrt{2}\sqrt{41 - 80\lambda^2 + 50\lambda^4 - 6(3 + 10\lambda^2) \cos(\lambda\pi) + 9 \cos(2\lambda\pi)}}{55(2\lambda^2 - 1 + \cos(\lambda\pi))} \quad (4.19)$$

Diese Gleichung lässt sich nicht nach λ auflösen. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von einer implizit definierten Funktion, da die Werte für λ nicht durch eine einfache Zuordnungsvorschrift $\lambda = f(\eta)$ gegeben sind, sondern vielmehr durch eine Gleichung $F(\lambda, \eta) = 0$ definiert sind.

Durch Plotten des Kurvenverlaufs, der hier auf geschlossen-analytischem Weg gewonnenen Funktion $\eta(\lambda)$, erhält man jedoch gerade den Fall $\alpha = 90^\circ$ aus Abbildung 4.11 bei vertauschten Rollen von λ und $\eta = \frac{E_2}{E_1}$. Auf der Abszisse befindet sich nun die (reelle) Variable λ und auf der Ordinate werden die Funktionswerte $\eta(\lambda)$ aufgetragen. Anschaulich gesprochen liegt die Abbildung 4.11 um 90° gedreht vor.

Wendet man die beschriebene Vorgehensweise auf die anderen Konfigurationen in den Abbildungen 4.11 - 4.12 an, erhält man sämtliche echt reellen Äste. Auch die Kurvenverläufe für $\alpha = 135^\circ$ und $\alpha = 170^\circ$ aus Abbildung 4.12 werden auf diese Weise vollständig gewonnen. Dabei entstehen zwar etwas längere Ausdrücke, die aber alle mit MATHEMATICA gut handhabbar sind. Lediglich die komplexwertigen Zweige beim Fall $\alpha = 45^\circ$ in Abbildung 4.11 können so nicht erfasst werden.

Die beschriebene Methode zur Gewinnung geschlossen-analytischer Lösungen der Form $\eta = \eta(\lambda)$ lässt sich einfach auf andere Bimaterialkonfigurationen anwenden und stellt eine wichtige theoretische Erkenntnis dar, die nach Wissen des Autors neu ist bzw. bislang nicht publiziert wurde.

Eine sinnngemäße Anwendung auf Trimaterialkonfigurationen ist auch denkbar, allerdings entstehen dabei enorm lange Ausdrücke, weswegen lediglich eine kurze Anleitung angegeben wird. Verwendet man wie im späteren Abschnitt 4.3 den Elastizitätsmodul E_1 als Referenzsteifigkeit, weist E_2 , den Querkontraktionszahlen sowie allen Winkeln feste Werte zu und betrachtet das charakteristische Polynom als Funktion von $\eta = \frac{E_3}{E_1}$, dann stellt sich heraus, dass ähnlich wie in (4.18) ein Polynom vierten Grades in η vorliegt:

$$D(\eta, \lambda) = a_0(\lambda) + a_1(\lambda) \eta + a_2(\lambda) \eta^2 + a_3(\lambda) \eta^3 + a_4(\lambda) \eta^4 .$$

Eine solche *Quartische Gleichung* ist geschlossen-analytisch lösbar, bekannte Ansätze gehen auf Cardano [11] und Euler zurück. Gleichungen höheren Grades lassen sich im Allgemeinen nicht mehr mit Hilfe von Wurzeln lösen. Dann sind numerische Verfahren anzuwenden.

4.2.3 Einfluss der Querkontraktionszahlen

Abschließend soll für die spezielle Bimaterialkonfiguration mit $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $\eta = \frac{E_2}{E_1}$ demonstriert werden, welchen Einfluss die Querkontraktionszahlen ν_1 und ν_2 auf das Verhalten der Singularitätsordnungen haben. Dabei sei darauf hingewiesen, dass für eine Querkontraktionszahl ν in der linearen Elastizitätstheorie die Einschränkungen $-1 < \nu < \frac{1}{2}$ gelten (siehe z.B. Becker und Gross [2]). Es gibt zwar vereinzelte Materialien - sogenannte auxetische Materialien - mit negativer Querkontraktionszahl, aber diese dürfen als eher akademisch angesehen werden. Der technisch interessante Bereich liegt zwischen den Werten 0 und 0.5 für die Querkontraktionszahlen. Dennoch werden der Vollständigkeit wegen auch negative Querkontraktionszahlen in den Diagrammen in Betracht gezogen.

Für das charakteristische Polynom lässt sich auch bei unterschiedlichen Querkontraktionszahlen eine multiplikative Zerlegung $\det \mathbf{B} = \det \mathbf{B}^I \cdot \det \mathbf{B}^{II}$ in einen symmetrischen Anteil und einen antisymmetrischen Anteil angeben. Im hier betrachteten Fall $\alpha = \frac{\pi}{2}$ stellt sich ferner heraus, dass die beiden Anteile bis auf einen Vorfaktor, der für die Nullstellensuche irrelevant ist, gleich sind. Deswegen gilt $\operatorname{Re} \lambda^I = \operatorname{Re} \lambda^{II}$. Nach Abspaltung des Vorfaktors resultiert:

$$\begin{aligned} D(\nu_1, \nu_2, \eta, \lambda) = & \left[(1 + \nu_2)^2 \left(4\nu_2 - 3 + (3 - 4\nu_2) \cos(4\pi\lambda) + 2ie^{2i\pi\lambda} (1 - 4\lambda^2) \sin(\pi\lambda) \right. \right. \\ & + 2ie^{2i\pi\lambda} (3 - 4\nu_2)^2 \sin(\pi\lambda) \Big) + i(3 - 4\nu_2)(1 + \nu_2)^2 \sin(4\pi\lambda) \\ & + \eta(1 + \nu_2)8ie^{2i\pi\lambda}(1 + \nu_1) \sin(\pi\lambda) \left((2\nu_1 - 1)(1 + 2\lambda^2 - 2\nu_2) \right. \\ & + (5 - 6\nu_2 + \nu_1(8\nu_2 - 6)) \cos(\pi\lambda) \Big) - \eta^2 4ie^{2i\pi\lambda} \\ & \left. \cdot (1 + \nu_1)^2 (4\nu_1 - 3)(2\lambda^2 - 1 + \cos(\pi\lambda)) \sin(\pi\lambda) \right] \frac{(4 - 4\nu_1)}{(1 + \nu_1)^2} e^{-2i\pi\lambda}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Offensichtlich ist $D(\nu_1, \nu_2, \eta, \lambda)$ für $\nu_1 = -1$ nicht definiert. In den Abbildungen 4.13 - 4.15 wird für verschiedene Steifigkeitsverhältnisse ($\eta = E_2/E_1 = 1, 10, \frac{1}{10}$) die Eigenwertverteilung als Funktion von ν_2 dargestellt. Für alle Werte von η wird eine Kurvenschar verschiedener Werte von ν_1 angegeben: Im linken Teil jeder Abbildung befinden sich die Kurvenverläufe für die positiven Werte $\nu_1 = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ und im rechten Teil für die Werte $\nu_1 = 0, -0.1, -0.3, -0.5, -0.7, -0.9$.

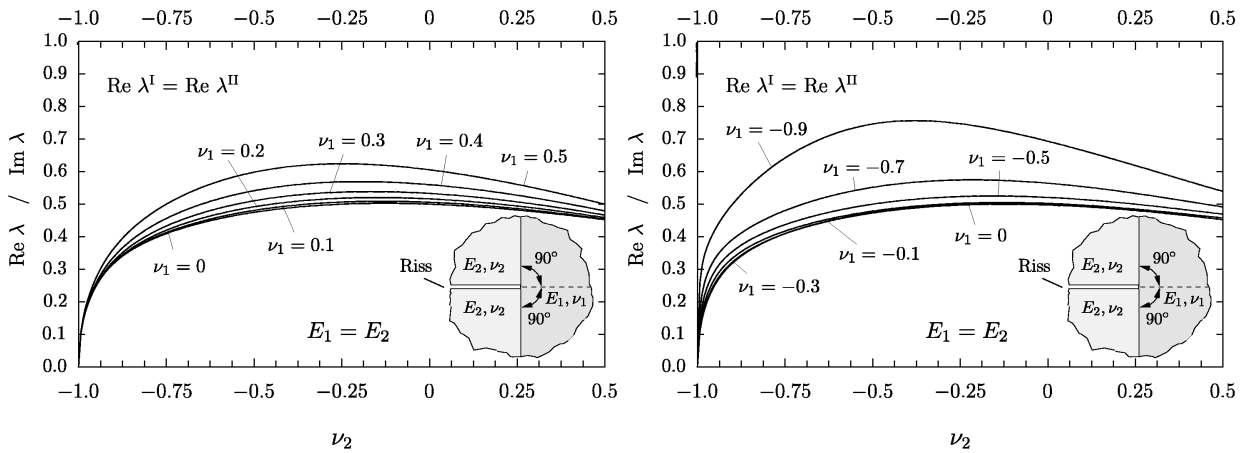


Abbildung 4.13: Eigenwerte der abgebildeten Konfigurationen als Funktion der Querkontraktionszahl ν_2

In Abbildung 4.13 liegt der Fall $\eta = 1$ vor, d.h. beide Materialien besitzen den gleichen Elastizitätsmodul, sie unterscheiden sich lediglich in der Querkontraktionszahl. Die dargestellten Kurvenverläufe liegen in einem schmalen Band eng zusammen, insbesondere im technisch interessanten Bereich. Für feste Werte von ν_2 liefert $\nu_1 = 0$ in allen Fällen die stärkste Singularität. Im technisch interessanten Bereich ist die Stelle mit der schwächsten Singularität offensichtlich durch die Kombination $\nu_1 = 0.5$ und $\nu_2 = 0$ gegeben.

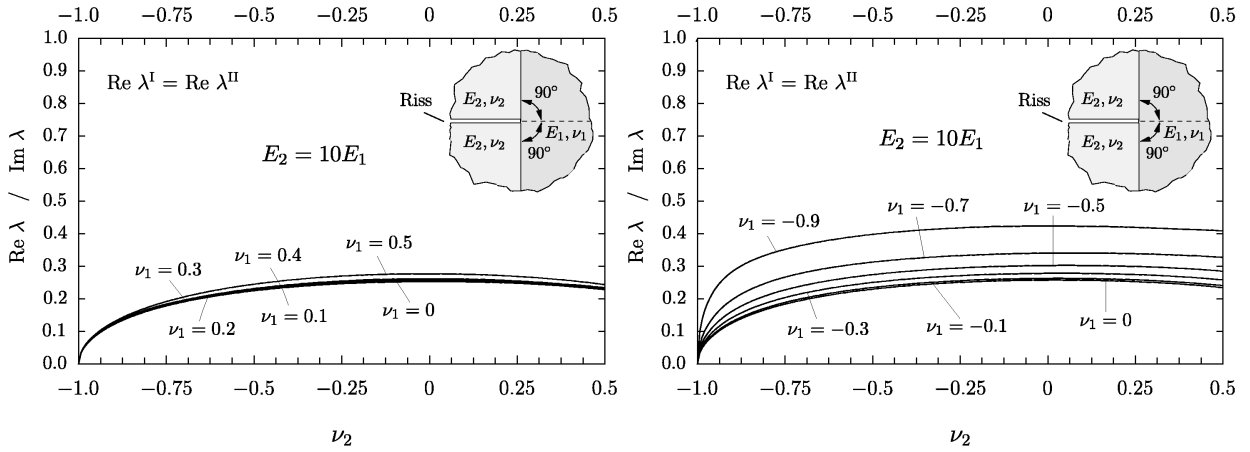


Abbildung 4.14: Eigenwerte der abgebildeten Konfigurationen als Funktion der Querkontraktionszahl ν_2

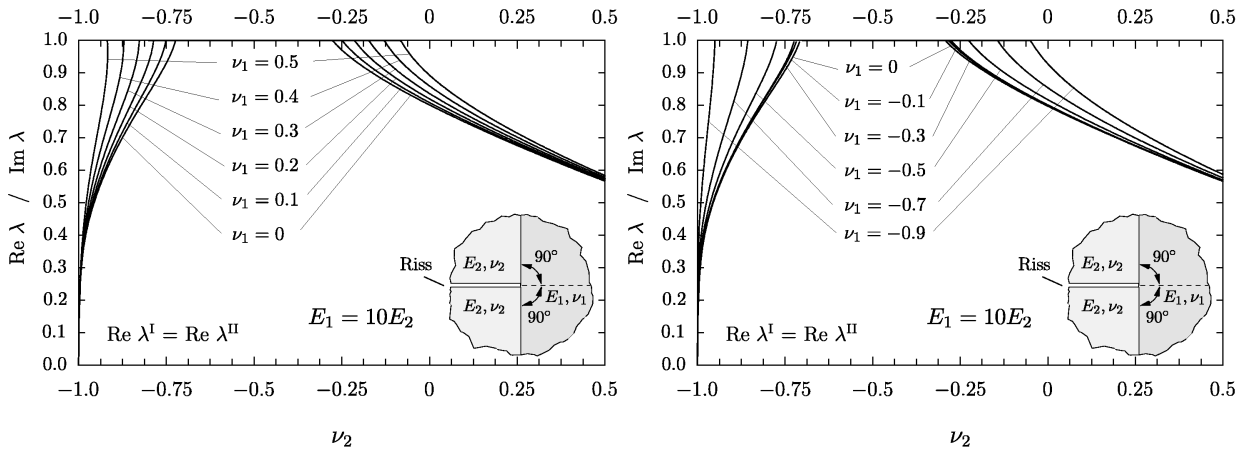


Abbildung 4.15: Eigenwerte der abgebildeten Konfigurationen als Funktion der Querkontraktionszahl ν_2

Wenn der Riss im steiferen Material liegt ($E_2 = 10E_1$ in Abbildung 4.14) rücken die Kurvenverläufe noch enger zusammen. Sie sind insbesondere für positive Werte von ν_1 kaum noch bzw. gar nicht mehr voneinander zu unterscheiden. Auch hier liefert bei festgehaltenem Wert von ν_2 der zu $\nu_1 = 0$ gehörende Kurvenverlauf stets die stärkste Singularität. Wie es gemäß der vorherigen Abschnitte zu erwarten ist, liegen hier im technisch interessanten Bereich Supersingularitäten vor, da sich der Riss im steiferen Material befindet.

In Abbildung 4.15 befindet sich der Riss schließlich im weicheren Material ($E_2 = \frac{1}{10}E_1$). Dort zeigen sich weitere Modi im Bereich $-1 < \nu_2 < -0.7$ und auch hier liegen sämtliche Kurvenverläufe sehr eng beieinander.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden neben den angegebenen Fällen auch weitere Werte von η untersucht, wobei sich zeigte, dass ein größerer Unterschied in den Steifigkeiten dazu führt, dass die oben angesprochenen Bänder noch dünner werden. Darüber hinaus stellte sich auch bei allen anderen betrachteten Multi-Materialkonfigurationen heraus, dass die Querkontraktionszahlen nur einen geringen Einfluss auf die Singularitätsordnung haben.

4.3 Verstärkungspflasterstellen

In diesem Abschnitt wird die Bimaterialkonfiguration in Abbildung 4.16 betrachtet, die aus einer Grundstruktur 1 und einem Verstärkungspflaster 2 besteht. Verstärkungs- oder Reparaturpflaster werden häufig eingesetzt, um eine Verlängerung der Nutzungsdauer einer Struktur gewährleisten zu können, die ein überbeanspruchtes oder geschädigtes Bauteil enthält, welches nicht einfach austauschbar ist. Derartige Konfigurationen liegen auch bei der Beschichtung von Substraten vor, also bei vielen technischen Anwendungen. Sie sind daher nicht nur von theoretischem, sondern auch von hohem praktischen Interesse.

Die durch ein Pflaster gegebenen Diskontinuitäten führen zu Spannungskonzentrationen, die Delaminationen hervorrufen können, welche wiederum die Festigkeit einer Gesamtstruktur deutlich herabzusetzen vermögen. Für eine umfassende Beurteilung solcher Situationen, insbesondere im Hinblick auf bruchmechanische Fragestellungen, ist eine alleinige Analyse der Singularitätsordnungen im Allgemeinen nicht ausreichend. Dennoch liefert eine asymptotische Nahfeldanalyse bei geringem Aufwand grundlegende Informationen und damit einen zentralen Beitrag zum besseren Verständnis der auftretenden Nahfelder.

Ausführliche Darstellungen zu Spannungskonzentrations-Effekten an Verstärkungspflaster-Ecken bei Laminaten, unter Berücksichtigung von Anisotropie, finden sich zum Beispiel in der Dissertation von Wigger [86].

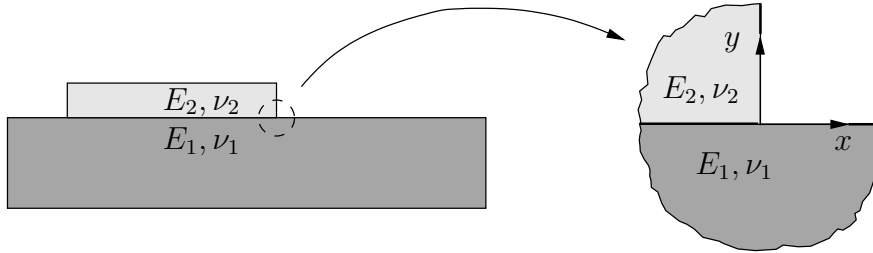


Abbildung 4.16: Grundstruktur mit Verstärkungspflaster bzw. Substrat mit Beschichtung

Mit dem Koordinatensystem aus Abbildung 4.16 liegt gegenüber der Vorgehensweise aus Abschnitt 3.1 eine geänderte Anordnung der Sektoren vor, was aber kein Problem darstellt. Definiert man das Interface durch $\varphi = \pi$ und die lastfreien Ränder bei den Materialien 2 bzw. 1 durch $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bzw. $\varphi = 2\pi$, erhält man die Übergangs- und Randbedingungen:

$$a_{11} e^{2i\lambda\pi} + \bar{a}_{21} \lambda + \bar{b}_{21} = a_{12} e^{2i\lambda\pi} + \bar{a}_{22} \lambda + \bar{b}_{22} , \quad (4.21)$$

$$\bar{a}_{21} e^{-2i\lambda\pi} + a_{11} \lambda + b_{11} = \bar{a}_{22} e^{-2i\lambda\pi} + a_{12} \lambda + b_{12} , \quad (4.22)$$

$$\frac{1}{\mu_2} \left(\bar{a}_{22} \lambda e^{2i\pi} + \bar{b}_{22} - \kappa_2 a_{12} e^{2i\lambda\pi} \right) = \frac{1}{\mu_1} \left(\bar{a}_{21} \lambda + \bar{b}_{21} - \kappa_1 a_{11} e^{2i\lambda\pi} \right) , \quad (4.23)$$

$$\frac{1}{\mu_2} \left(a_{12} \lambda + b_{12} - \kappa_2 \bar{a}_{22} e^{-2i\lambda\pi} \right) = \frac{1}{\mu_1} \left(a_{11} \lambda + b_{11} - \kappa_1 \bar{a}_{21} e^{-2i\lambda\pi} \right) , \quad (4.24)$$

$$a_{12} e^{i\lambda\pi} - \bar{a}_{22} \lambda + \bar{b}_{22} = 0 , \quad (4.25)$$

$$a_{12} \lambda e^{-i\lambda\pi} + \bar{a}_{22} e^{-i\lambda\pi} + b_{12} = 0 , \quad (4.26)$$

$$a_{11} e^{4i\lambda\pi} + \bar{a}_{21} \lambda + \bar{b}_{21} = 0 , \quad (4.27)$$

$$a_{11} \lambda + \bar{a}_{21} e^{-4i\lambda\pi} + b_{11} = 0 . \quad (4.28)$$

Nach Abspaltung von Vorfaktoren, die für die Nullstellensuche irrelevant sind, nimmt die charakteristische Gleichung mit $\nu_1 = \nu_2 = \frac{2}{10}$ und dem modularen Verhältnis $\eta = \frac{E_2}{E_1}$ die folgende Gestalt an:

$$D(\eta, \lambda) := 2 (50\lambda^2 - 73 - 55 \cos(\lambda\pi)) \sin(\lambda\pi)^2 + 4\eta (9 + 30\lambda^2 - 73 \cos(\lambda\pi)) \sin(\lambda\pi)^2 + \eta^2 (2\lambda^2 - 1 + \cos(\lambda\pi)) (73 + 55 \cos(2\lambda\pi)) \stackrel{!}{=} 0. \quad (4.29)$$

In Abbildung 4.17 sind die Eigenwerte λ als Funktion von $\eta = \frac{E_2}{E_1}$ dargestellt. Auch in diesem Abschnitt gilt bei komplexen Eigenwerten, dass diese stets als ein Paar konjugiert-komplexer Werte auftreten, wobei in der Abbildung nur der Wert mit positivem Imaginärteil angegeben wird.

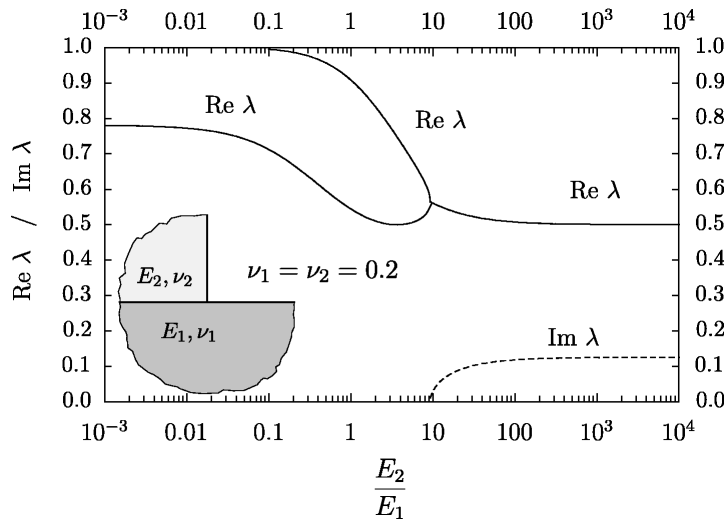


Abbildung 4.17: Eigenwerte der abgebildeten Konfigurationen als Funktion des modularen Verhältnisses E_2/E_1

In der Nähe von $\eta = 10$ liegt eine doppelte reelle Nullstelle vor, die Regionen mit reellen Eigenwerten und komplexen Eigenwerten separiert. Diese Stelle lässt sich nicht geschlossen-analytisch ermitteln, kann aber beliebig genau numerisch bestimmt werden, indem man das Gleichungssystem

$$D(\eta, \lambda) = 0 \quad , \quad \frac{\partial D}{\partial \lambda}(\eta, \lambda) = 0$$

mit dem Newton-Verfahren und einem geeigneten Startpunkt (etwa $\eta = 10$, $\lambda = 0.5$) löst. Für betragsmäßig kleine Werte von $D(\eta, \lambda)$ müssen auch hier äußerst genaue Eingabedaten verwendet werden. Die Angabe

$$D(\eta = 9.33084, \lambda = 0.56435) = 0.00012$$

soll an dieser Stelle zur Angabe der doppelten Nullstelle genügen. Mit der Implementation lässt sich leicht nachweisen, dass die Bedingung (3.70) von Dempsey erfüllt ist, wobei $m = 7$ gilt. Der Eigenraum zur doppelten Nullstelle $(\eta, \lambda) = (9.33084..., 0.56435...)$ ist eindimensional, die algebraische sowie die geometrische Vielfachheit der Nullstelle sind ungleich; es liegt eine logarithmische Singularität an dieser Stelle und nur an dieser Stelle vor.

Die Kurvenverläufe der Realteile in der oberen Hälfte weisen darauf hin, dass keine Super-singularitäten vorliegen. Jedoch führen bereits Steifigkeitswerte E_2 in der näheren Umgebung des Elastizitätsmoduls E_1 der Grundstruktur zu ähnlich starken Singularitäten wie beim klassischen Riss. Ein Pflaster, das weicher als die Grundstruktur ist, führt offensichtlich zu kleineren Singularitätsordnungen als ein steiferes Pflaster. Daraus darf aber nicht abgeleitet werden, dass ein Pflaster grundsätzlich so weich wie möglich sein sollte, denn um seine unterstützende Funktion zu erfüllen, muss ein Pflaster eine gewisse Mindeststeifigkeit aufweisen.

Eine einfache Möglichkeit, die Singularitätsordnungen zu verringern, besteht darin eine zusätzliche, keilförmige Schicht von geeigneter Steifigkeit wie in Abbildung 4.18 anzubringen. Im Hinblick auf singuläres Spannungsverhalten müssen dann auch die beiden Stellen B und C in Betracht gezogen werden, doch zunächst soll das asymptotische Verhalten an der neu entstandenen Trimaterial-Konfiguration bei A untersucht werden.

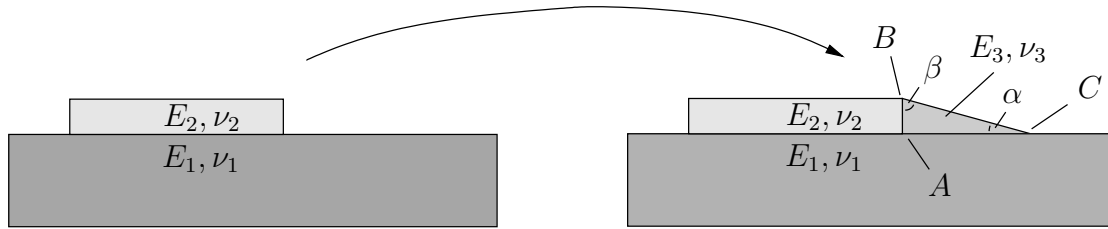


Abbildung 4.18: Grundstruktur mit Verstärkungspflaster und einer dritten Schicht

Auf eine explizite Angabe der Koeffizientendeterminante bzw. der charakteristischen Gleichung wird aufgrund ihrer Größe verzichtet. Für die Querkontraktionszahlen wird $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.2$ gesetzt und in den Abbildungen 4.19 - 4.21 sind die Eigenwerte der Trimaterialkonfiguration als Funktion des modularen Verhältnisses von $\frac{E_3}{E_1}$ für steifere Pflaster mit $E_2 = 2E_1, 5E_1, 10E_1, 50E_1, 100E_1, 1000E_1$ dargestellt. In den Abbildungen 4.22 - 4.23 befinden sich die entsprechenden Diagramme für weichere Pflaster mit $E_2 = \frac{1}{2}E_1, \frac{1}{5}E_1, \frac{1}{10}E_1, \frac{1}{100}E_1$.

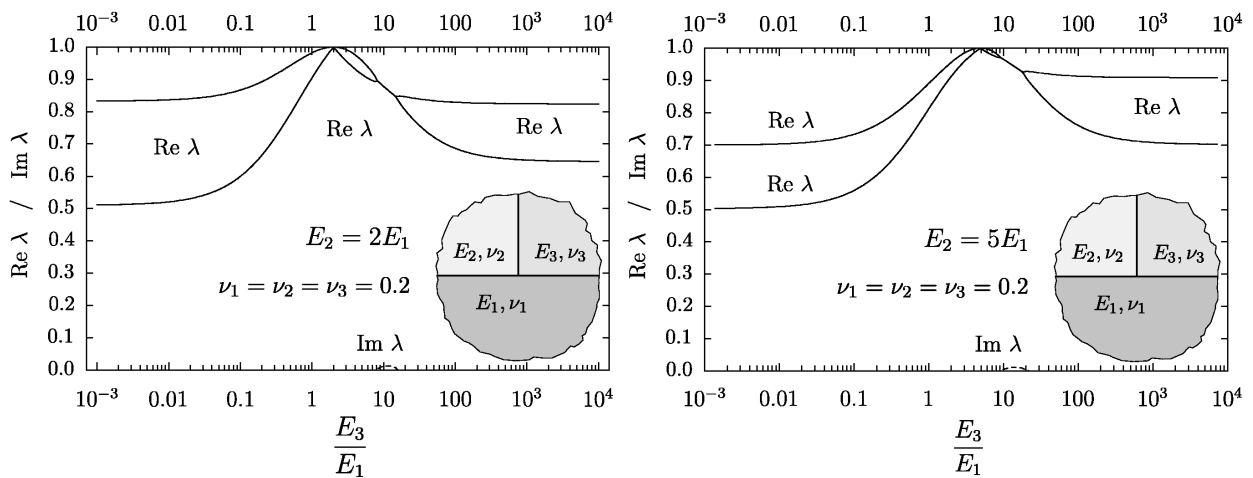


Abbildung 4.19: Eigenwerte der abgebildeten Konfigurationen als Funktion des modularen Verhältnisses E_3/E_1

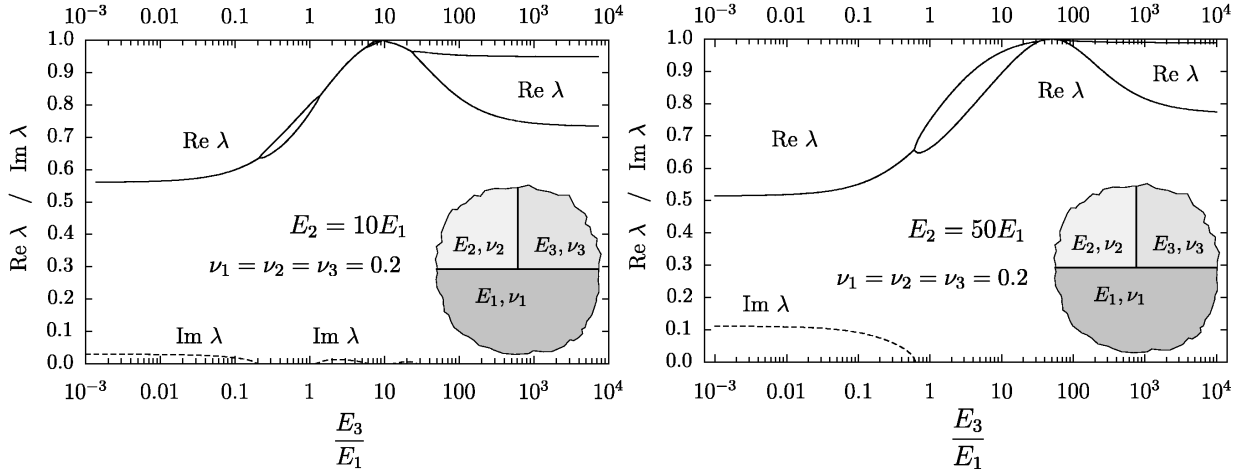


Abbildung 4.20: Eigenwerte der abgebildeten Konfigurationen als Funktion des modularen Verhältnisses E_3/E_1

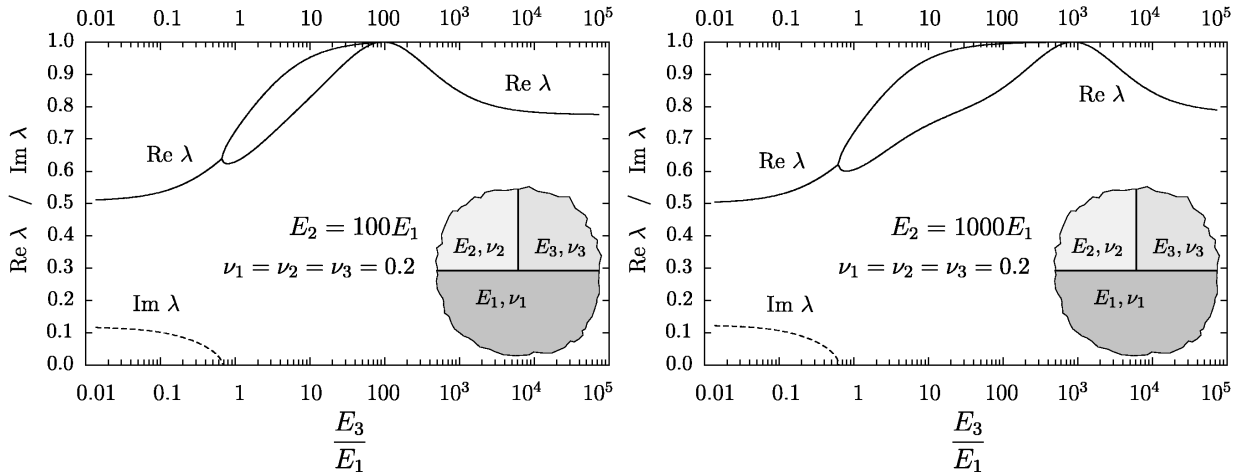


Abbildung 4.21: Eigenwerte der abgebildeten Konfigurationen als Funktion des modularen Verhältnisses E_3/E_1

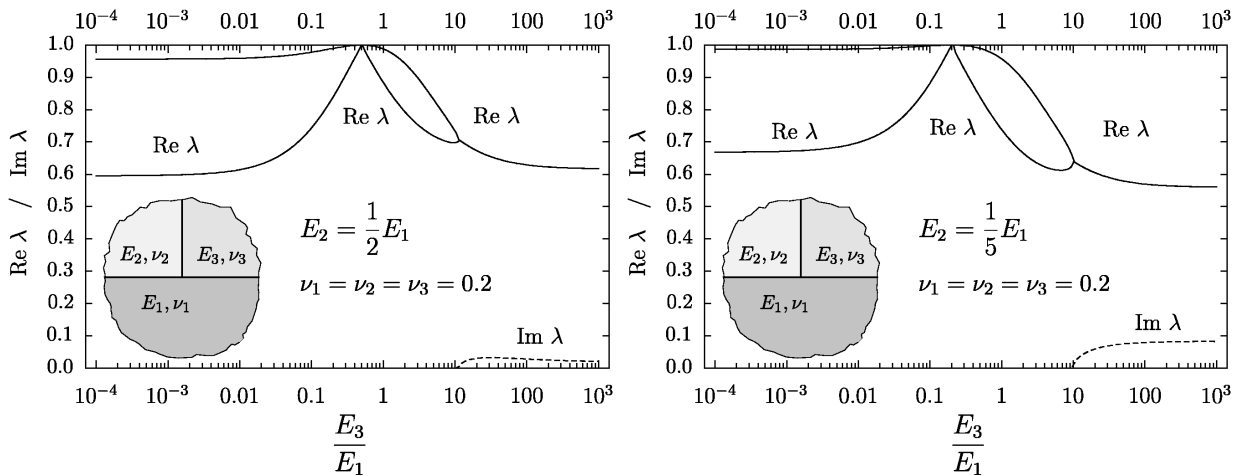


Abbildung 4.22: Eigenwerte der abgebildeten Konfigurationen als Funktion des modularen Verhältnisses E_3/E_1

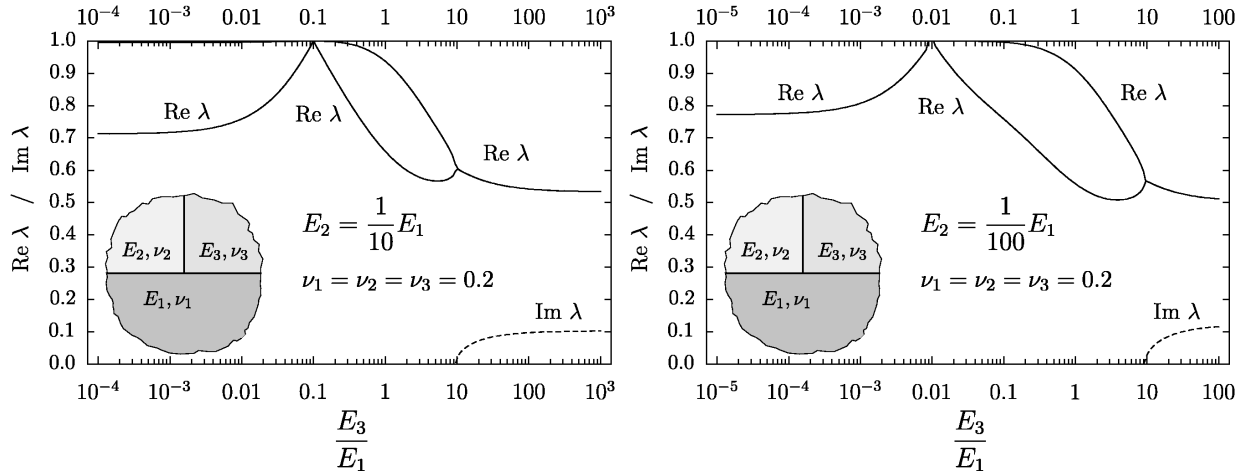


Abbildung 4.23: Eigenwerte der abgebildeten Konfigurationen als Funktion des modularen Verhältnisses E_3/E_1

Keine Singularität - also der Idealfall - liegt vor, wenn $E_3 = E_2$ gilt, was der Erwartung entspricht, da dann bei der asymptotischen Analyse zwei ideal verbundene Halbräume betrachtet werden. Befindet sich E_3 in der nahen Umgebung von E_2 , liegen nur schwache Singularitätsordnungen vor. Damit ist es möglich durch eine einfache Maßnahme eine signifikante Reduzierung der Singularitätsordnung an dieser Stelle zu erreichen.

Wie zuvor erwähnt, müssen noch die Stellen B und C von Abbildung 4.18 betrachtet werden, da dort ebenfalls Spannungskonzentrationen hervorgerufen werden können. Sollten diese ähnlich stark wie, oder gar stärker als die eingangs untersuchte Singularität (vgl. Abbildung 4.17) sein, hätte man keinen Gewinn erzielt.

Die obere Stelle B stellt sich bei einer Analyse als vollkommen unkritisch heraus. Im Rahmen der Untersuchungen konnte für beliebige Werte von $10^{-5} < \frac{E_3}{E_2} < 10^5$ und beliebige Winkel $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ kein singuläres Verhalten gefunden werden.

Bei Stelle C dagegen kann singuläres Verhalten beobachtet werden. In den Abbildungen 4.24 - 4.25 sind die Eigenwerte als Funktion von $\frac{E_3}{E_1}$ für verschiedene Winkel ($\alpha = 45^\circ, 22.5^\circ, 10^\circ, 5^\circ$) dargestellt.

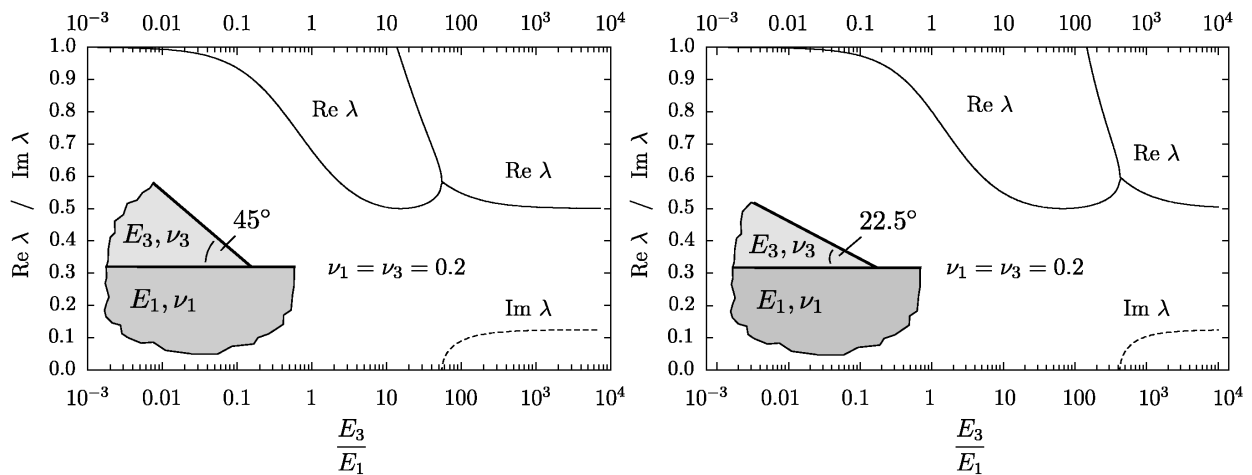


Abbildung 4.24: Eigenwerte der abgebildeten Konfigurationen als Funktion des modularen Verhältnisses E_3/E_1

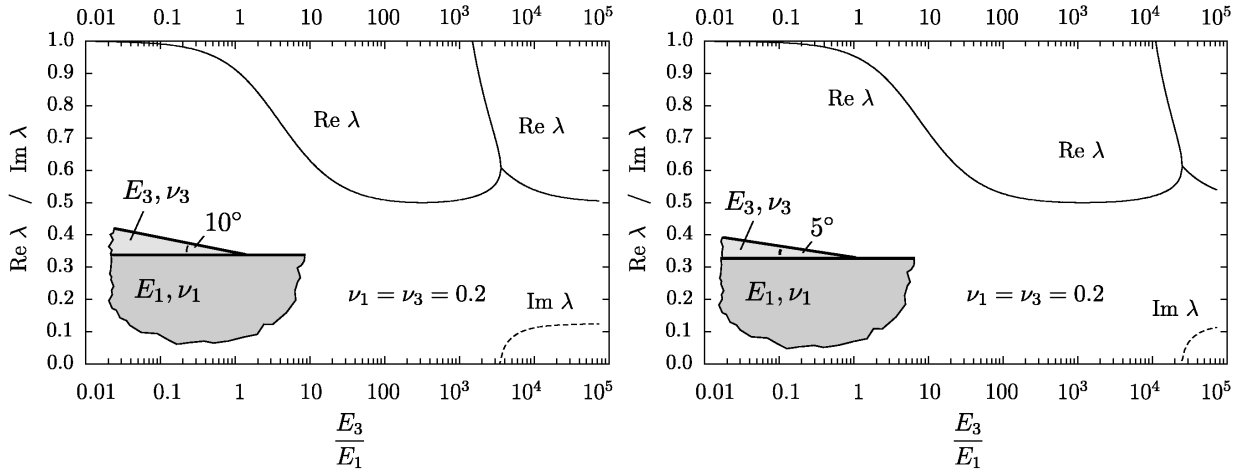


Abbildung 4.25: Eigenwerte der abgebildeten Konfigurationen als Funktion des modularen Verhältnisses E_3/E_1

Die Kurvenverläufe ähneln sich qualitativ und in allen Fällen führt ein kleines bzw. hohes Verhältnis von $\frac{E_3}{E_1}$ zu schwächeren bzw. stärkeren Singularitäten. Darüber hinaus lässt sich aus den Diagrammen ablesen, dass kleinere Winkel α vorzuziehen sind, da sie anschaulich gesprochen starke Singularitäten in Gebiete mit höheren Werten von $\frac{E_3}{E_1}$ verschieben und daher mildernd wirken.

Von einem optimalen Keil kann hier nicht gesprochen werden, da zur Bestimmung eines solchen eine Optimierung/Minimierung mit zwei Zielfunktionen (die Singularitätsordnungen bei den Stellen A und C) durchgeführt werden müsste. Mithilfe der vorigen Plots ist es aber leicht möglich sich einen Überblick über verschiedene Konfigurationen zu verschaffen.

Dies soll am Beispiel eines steiferen Pflasters mit $E_2 = 1000E_1$ demonstriert werden, indem eine Tabelle erstellt wird, in der die Eigenwerte für die kritischen Stellen A (ohne und mit Keil) und C gegenübergestellt werden. Wenn für eine Kombination mehrere Eigenwerte existieren, wird stets der kleinste Eigenwert angegeben, der zur stärksten Singularität gehört. Dabei sei nochmals an das Verhalten der Spannungen von der Art $\sigma \sim r^{\text{Re } \lambda - 1}$ erinnert.

$E_2 = 1000E_1$						
$\frac{E_3}{E_1}$	Eigenwert λ bei Stelle A		Eigenwert λ bei Stelle C			
	ohne Keil	mit Keil	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 22.5^\circ$	$\alpha = 10^\circ$	$\alpha = 5^\circ$
$\frac{1}{10}$	$0.50 + 0.12i$	$0.53 + 0.10i$	0.93	0.97	0.99	0.99
$\frac{1}{2}$	$0.50 + 0.12i$	$0.62 + 0.02i$	0.76	0.88	0.95	0.97
1	$0.50 + 0.12i$	0.61	0.67	0.80	0.90	0.95
5	$0.50 + 0.12i$	0.71	0.53	0.60	0.71	0.80
10	$0.50 + 0.12i$	0.75	0.50	0.55	0.63	0.71
50	$0.50 + 0.12i$	0.82	0.53	0.50	0.52	0.56
100	$0.50 + 0.12i$	0.86	$0.55 + 0.08i$	0.50	0.51	0.53
1000	$0.50 + 0.12i$	1	$0.50 + 0.12i$	$0.54 + 0.10i$	0.51	0.50
10^4	$0.50 + 0.12i$	0.86	$0.50 + 0.13i$	$0.50 + 0.12i$	$0.55 + 0.11i$	0.51

Ein weicherer Keil bewirkt zwar nur geringe Singularitätsordnungen an der Stelle C , mildert dafür aber die Singularität der im Fokus stehenden Stelle A kaum ab. Ein Keil mit ähnlich hohen Steifigkeitswerten wie das Pflaster wirkt sich dagegen lediglich an der Stelle A vorteilhaft aus.

Eine gute Wahl ist hier offensichtlich ein Keil, der mit möglichst kleinem Winkel an der Stelle C an die Grundstruktur anschließt und dabei etwas steifer als diese ist. Mit dem Verhältnis $\frac{E_3}{E_1} = 10$ und $\alpha = 5^\circ$ etwa erreicht man eine deutliche Milderung der Singularität bei der Stelle A von $\sigma \sim r^{-0.5}$ auf $\sigma \sim r^{-0.25}$. An der Stelle C liegt dann ein Abklingverhalten der Art $\sigma \sim r^{-0.29}$ vor.

Schließlich sei noch angemerkt, dass wie in Abbildung 4.26 skizziert, durch eine leichte Modifikation des Keils ein kleiner Winkel α an der Stelle C bei geringerem Materialaufwand und Platzbedarf erreicht werden kann.

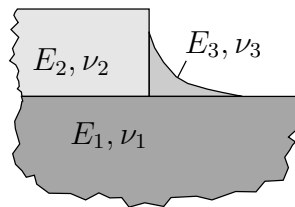


Abbildung 4.26: Modifizierte Gestalt der Zusatzschicht

4.4 Kanalbildung

In diesem Abschnitt wird zunächst die sogenannte *Kanalbildung* (channeling), also das Aufreißen einer i.d.R. dünnen Schicht 2 auf einem Trägermaterial 1 wie in Abbildung 4.27 betrachtet. Dabei weist die Schicht 2 auf dem Substrat eine symmetrische Kerböffnung auf.

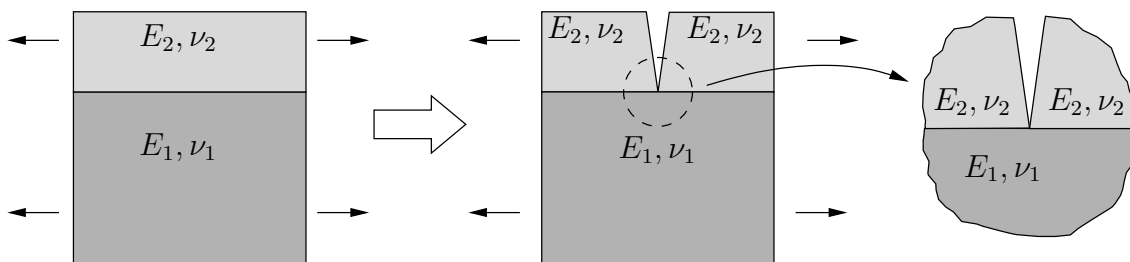


Abbildung 4.27: Kanalbildung

Wie die zuvor betrachtete Pflasterstelle, ist auch diese Konfiguration von hohem theoretischen und praktischen Interesse, da derartige Situationen bei vielen technischen Anwendungen auftreten. Für eine umfassende Beurteilung dieser Situationen, insbesondere im Hinblick auf bruchmechanische Fragestellungen, ist auch hier eine alleinige Analyse der Singularitätsordnungen im Allgemeinen nicht ausreichend. Eine asymptotische Nahfeldanalyse liefert jedoch grundlegende Informationen und damit einen zentralen Beitrag zum besseren Verständnis der auftretenden Nahfelder bei geringem Aufwand.

In den Kanal wird nun ein drittes Material (Reparaturmaterial) eingebracht, wobei vorausgesetzt sei, dass an allen Rändern perfekt verbundene Interfaces vorliegen. Auf eine Angabe der Übergangsbedingungen, der Koeffizientenmatrix oder der charakteristischen Gleichung wird wegen der Länge der Ausdrücke verzichtet.

In Abbildung 4.28 sind die Eigenwerte λ als Funktion des Steifigkeitsverhältnisses E_3/E_1 dargestellt, wobei die betrachtete Konfiguration abgebildet und die weiteren Materialdaten ($E_1 = 10E_2$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.2$) ebenfalls angegeben sind. Der Kanal befindet sich in der weicheren Schicht (weicher gegenüber dem Trägermaterial 1). Wie erwartet liegt bei $E_3 = \frac{1}{10}E_1$ das Optimum vor, denn dieser Wert entspricht dem Fall zweier perfekt verbundener Halbräume und dort zeigt sich bekannterweise kein singuläres Verhalten.

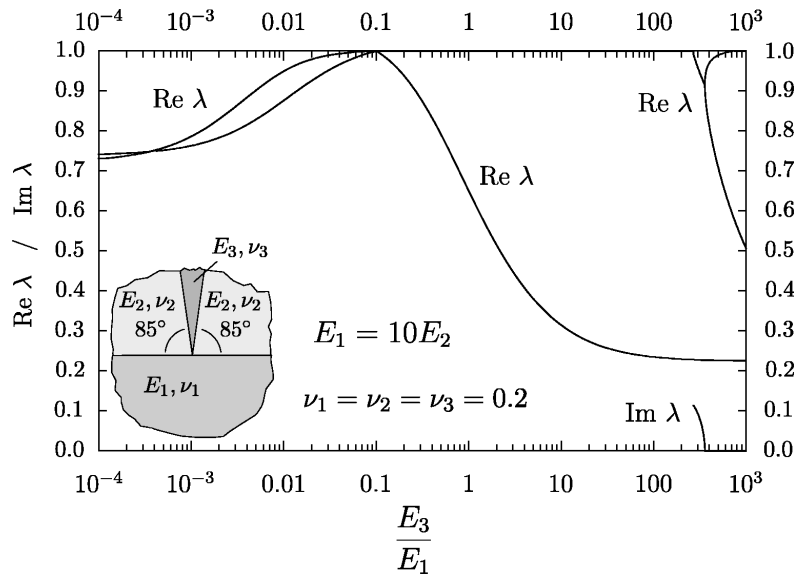


Abbildung 4.28: Eigenwerte der abgebildeten Konfigurationen als Funktion des modularen Verhältnisses E_3/E_1

Weiterhin lässt sich beobachten, dass ein hohes Steifigkeitsverhältnis $E_3/E_1 \gg \frac{1}{10}$ zu deutlich stärkeren Singularitäten führt, als ein kleines Verhältniss $E_3/E_1 \ll \frac{1}{10}$.

Im Rahmen der Untersuchungen stellte sich heraus, dass sowohl für andere Kombinationen von E_2/E_1 , als auch für andere Kerböffnungswinkel stets der qualitativ gleiche Verlauf wie in Abbildung 4.28 vorliegt: Ausgehend von dem Fall $E_3 = E_2$ (ideal verbundene Halbräume ohne Singularität) verlaufen zwei eng beieinander liegende Äste in eine Richtung, in der anderen Richtung beginnt erst in großem Abstand ein weiterer harmloser Ast. In den folgenden Abbildungen 4.29 - 4.31 wird der Übersichtlichkeit wegen bei jedem Kurvenverlauf einer der doppelten Äste sowie der harmlose Ast bei hohen Steifigkeitswerten ausgeblendet bzw. entfernt.

In jeder der Abbildungen 4.29 - 4.31 wird ein fester Kanalwinkel (85° , 45° , 5°) betrachtet. Im linken bzw. rechten Diagramm befinden sich jeweils Kurvenscharen für Kanäle in der steiferen Schicht (also $E_2 > E_1$) bzw. weicheren Schicht ($E_2 < E_1$).

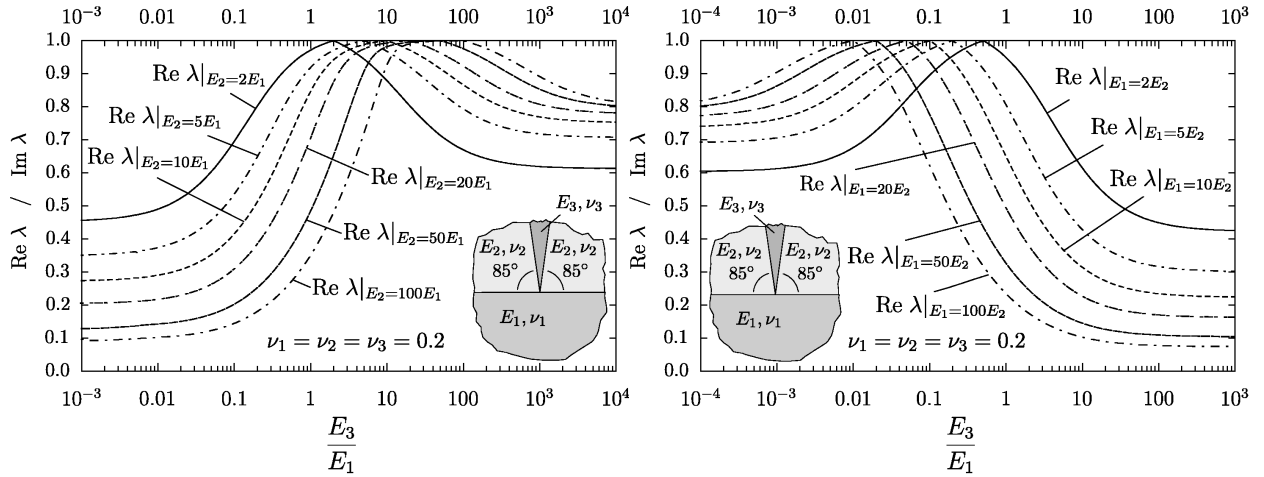


Abbildung 4.29: Eigenwerte der abgebildeten Konfigurationen als Funktion des modularen Verhältnisses E_3/E_1

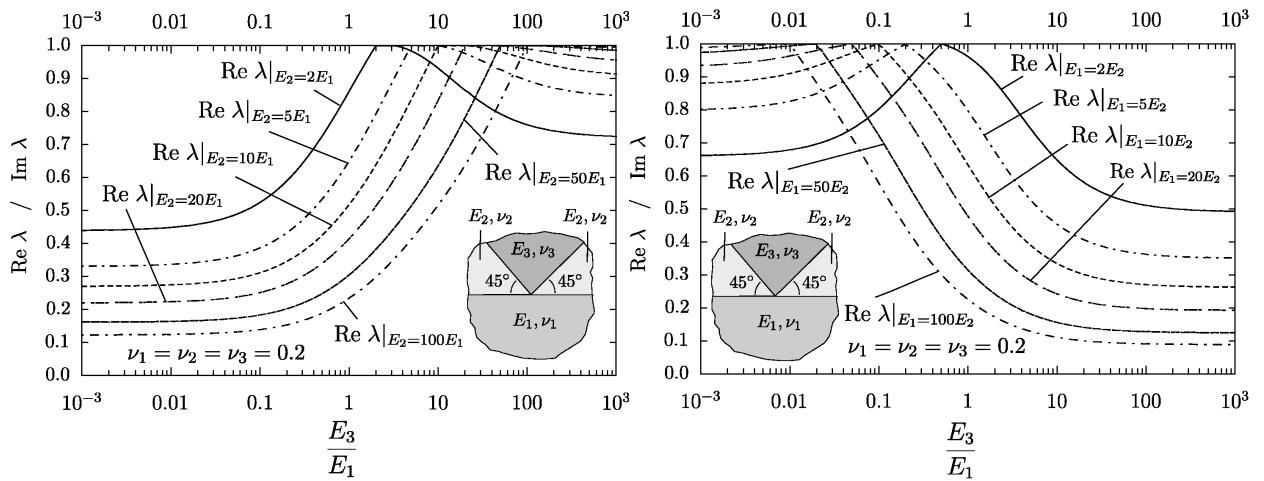


Abbildung 4.30: Eigenwerte der abgebildeten Konfigurationen als Funktion des modularen Verhältnisses E_3/E_1

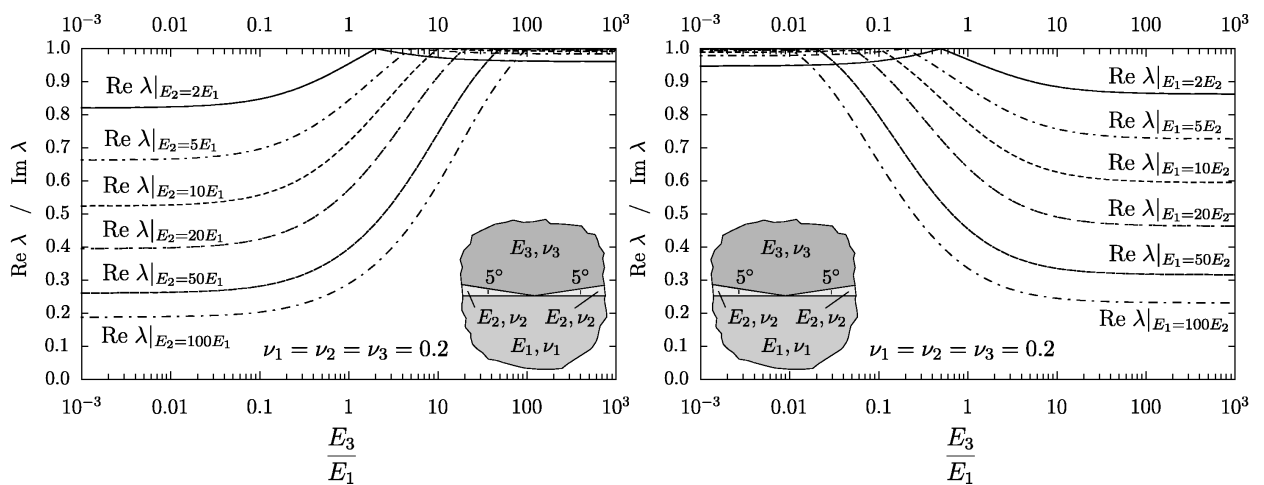


Abbildung 4.31: Eigenwerte der abgebildeten Konfigurationen als Funktion des modularen Verhältnisses E_3/E_1

Alle Fälle zeigen ein qualitativ ähnliches Verhalten, so dass sich folgende Regeln für den Anwender formulieren lassen:

- Wenn bei einem Kanaldefekt in einer steiferen Schicht (also $E_2 > E_1$) kein Reparaturmaterial 3 mit der Steifigkeit $E_3 = E_2$ zur Verfügung steht, dann sollte ein steiferes Reparaturmaterial (also $E_3 > E_2$) einem weicheren vorgezogen werden.
- Wenn bei einem Kanaldefekt in einer weicheren Schicht (also $E_2 < E_1$) kein Reparaturmaterial 3 mit der Steifigkeit $E_3 = E_2$ zur Verfügung steht, dann sollte ein weiches Reparaturmaterial (also $E_3 < E_2$) einem steiferen vorgezogen werden.

Je größer der Unterschied im Steifigkeitsverhältnis E_2/E_1 und je kleiner der Kerbwinkel, desto dringender scheint es geboten, diesen Regeln Folge zu leisten.

Diese Regeln sind keinesfalls als praxisfern, oder rein akademisch anzusehen. Man denke an eine beschädigte Beschichtung, die mit hohem technischen Aufwand, etwa durch Kathodenzerstäubung (Sputtern), aufgebracht wurde und sich nicht so ohne Weiteres mit dem gleichen Material und der gleichen Technik ausbessern lässt.

Abschließend sei bemerkt, dass in allen betrachteten Fällen die komplette Ebene mit Materialsektoren bedeckt ist, wobei alle Sektoren perfekt miteinander verbunden sind. Es liegen keinerlei Riss- oder Kerbsituationen vor. Trotz dieser Tatsachen, lassen sich in vielen Fällen Supersingularitäten finden, die deutlich stärker als die gemeine $r^{-1/2}$ -Rissspitzen-Singularität sind. Ein erstaunliches und überraschendes Ergebnis.

Kapitel 5

Zusammenfassende Diskussion und Ausblick

Bei Multi-Materialverbindungsstellen, die sich bei vielen technischen Anwendungen finden lassen, werden verschiedene Konstituenten durch stoffschlüssige Verbindungen zu einer Gesamtstruktur gefügt, um einige Materialeigenschaften der Verbindungspartner vorteilhaft miteinander zu vereinen. Eine Analyse im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie zeigt, dass solche Stellen kritisch sind, da wegen der dort gegebenen Diskontinuitäten singuläre Spannungsfelder vorliegen können. Obwohl die Gegebenheiten in realen Situationen harmloser sind - kein Material kann unendlich hohe Spannungen ertragen - ist die Analyse singulärer Spannungen dennoch von fundamentaler Bedeutung.

Typischerweise erfolgt die mechanische Analyse von Rissausbreitungsvorgängen in spröden Körpern im Rahmen der linearen Bruchmechanik. Diese basiert auf den Spannungsfeldern der linearen Elastizitätstheorie. Weiterhin gilt an einer solchen Stelle, dass vor allem die Felder in der unmittelbaren Umgebung von der Risspitze bzw. der kritischen Stelle maßgebend sind. Daher ist es nicht erforderlich ein vollständiges Randwertproblem zu untersuchen, was in den meisten Fällen ohnehin nur mit beträchtlichem numerischen Aufwand möglich wäre. Stattdessen hat es sich als höchst effizient erwiesen, Spannungs- und Verschiebungsverteilungen durch asymptotische Nahfeldanalysen zu ermitteln. Zum einen lassen sich asymptotische Lösungen bedeutend einfacher gewinnen und zum anderen weisen sie einen analytischen Charakter auf.

Ziel dieser Arbeit war es, einige Beiträge zu asymptotischen Nahfeldanalysen an ebenen Multi-Materialverbindungsstellen mit der komplexen Methode zu leisten. Dabei erfolgte eine Einschränkung auf Multi-Materialverbindungsstellen, die aus Fügungen isotroper Sektoren bestehen und ausschließlich in ihrer Ebene belastet sind. Bei den Analysen stand insbesondere die Ermittlung der Singularitätsexponenten im Vordergrund.

Nach dem einleitenden Kapitel 1, in dem unter anderem der Stand der Forschung betrachtet wurde, folgte in Kapitel 2 eine Zusammenstellung der benötigten theoretischen Grundlagen. Neben einer kurzen Diskussion des mechanischen Verhaltens von Festkörpern wurden einige wichtige Begriffe der linearen Elastizitätstheorie vorgestellt. Daran schloss sich eine Beschreibung der komplexen Methode an und zuletzt wurde der elementare Fall des Griffith-Risses ausführlich dargestellt.

In Kapitel 3 wurden theoretische Aspekte von asymptotischen Nahfeldanalysen mit der

komplexen Methode behandelt. Nach Formulierung verschiedener Übergangs- und Randbedingungen wurde das grundsätzliche Vorgehen bei einer Nahfeldanalyse vorgestellt. Mit einer geeigneten Kombination von Potenzfunktionen, die sich dadurch auszeichnen, dass komplexwertige Exponenten explizit zugelassen sind, wurde demonstriert, wie die sogenannten Eigenwerte λ , die mit dem singulären Spannungsverhalten in der Form $\sigma \sim r^{\operatorname{Re} \lambda - 1}$ zusammenhängen, gewonnen werden: Aus dem Satz von Übergangs- und Randbedingungen wird ein lineares Gleichungssystem erstellt, und die Forderung nach nichttrivialen Lösungen dieses Gleichungssystems führt zu den Nullstellen bzw. Eigenwerten λ . Im darauf folgenden dritten Abschnitt 3.3 wurde nachgewiesen, dass für eine große Klasse von Multi-Materialkonfigurationen die a priori - Einschränkung $\lambda \in \mathbb{R}$ bei den Exponenten der Potenzfunktionen auf die gleiche Koeffizientenmatrix und damit auf die gleichen Eigenwerte λ führt. Ein Nachweis über einen derart weitreichenden Zusammenhang ist nach Kenntnis des Autors neu. Im darauf folgenden Abschnitt wurden die aus den verwendeten Potentialen resultierenden Spannungs- und Verschiebungsfelder betrachtet sowie ein Vergleich mit den Feldern der analytischen Lösung des Griffith-Risses angestellt. Danach wurden logarithmische Singularitäten diskutiert und im Rahmen der komplexen Methode behandelt. Hier wurde einerseits demonstriert, dass logarithmische Singularitäten von eher akademischer Natur sind, andererseits wurde nachgewiesen, dass das lineare Gleichungssystem bei logarithmischen Singularitäten für eine große Klasse von Multi-Materialkonfigurationen die gleiche Gestalt annimmt. Abschließend wurden in Kapitel 3 Dundurs-Parameter vorgestellt sowie eine Zusammenfassung gegeben.

Aufbauend auf der in Kapitel 3 vorgestellten asymptotischen Methode wurden in Kapitel 4 die Singularitätsordnungen einiger ausgewählte Bi- und Trimaterialkonfigurationen untersucht. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde eine Implementation in das Computeralgebrasystem MATHEMATICA erstellt und für die Analysen verwendet. Sämtliche Ergebnisse weisen einen analytischen Charakter auf, da die charakteristische Gleichung in allen Fällen in geschlossener Form vorliegt und die Nullstellensuche im Prinzip mit beliebiger Präzision numerisch durchgeführt werden kann. Außerdem konnten sämtliche Ergebnisse durch die Implementation mit außerordentlich hoher Effizienz ermittelt werden.

Besonders hervorzuheben ist eine Methode, die im Rahmen dieser Arbeit entwickelt und bei der Analyse einer speziellen Bimaterialkonfiguration in Abschnitt 4.2.2 vorgestellt wurde. Diese erlaubt es in vielen Fällen geschlossen-analytische Lösungen zu ermitteln und ist nach Wissen des Autors neu.

Anhand einer Verstärkungspflaster-Stelle wurde eine einfache und wirkungsvolle Maßnahme zur Reduktion der Singularitätsordnungen vorgeschlagen. Abschließend wurde das Aufreißen einer dünnen Schicht auf einem Substrat (Kanalbildung) untersucht, wobei eine einfache Regel für den Anwender formuliert werden konnte. Eine Besonderheit der Untersuchungen aus Kapitel 4 stellt die Tatsache dar, dass in vielen Fällen "Supersingularitäten", also Singularitäten, die stärker als die klassische $\frac{1}{\sqrt{r}}$ - Risspitzen-Singularität sind, gefunden wurden.

Bei der Interpretation der vorgestellten Ergebnisse sollten stets die getroffenen Einschränkungen bedacht werden. Etwa die Einschränkung auf linear-elastisches Materialverhalten bzw. die Anwendung der linearen Elastizitätstheorie bei einem Riss. Reale Materialien weisen nur innerhalb gewisser Schranken ein solches Verhalten auf. An hochbelasteten

Stellen liegen keine singulären Spannungen vor, vielmehr führen inelastische Deformationen (z.B. plastisches Fließen) zu nichtsingulären Spannungskonzentrationen. Nur unter der Voraussetzung, dass Zonen mit inelastischem Verhalten sehr klein sind, kann die lineare Bruchmechanik (und damit die lineare Elastizitätstheorie) sinnvoll auf das gesamte rissbehaftete Gebiet angewendet werden. Dieser Fall ist typischerweise bei Metallen sowie spröden Werkstoffen gegeben.

Eine andere Einschränkung ist die auf den zweidimensionalen, ebenen Fall. Daher können keine Spannungszustände erfasst werden, die vollständig dreidimensionalen Charakter besitzen. Solche sind beispielsweise vom Laminatrandeffekt her bekannt.

Abschließend soll ein Ausblick gegeben werden. Eine Ausdehnung der Untersuchungen auf Multi-Materialverbindungsstellen mit anisotropem Materialverhalten der einzelnen Sektoren erscheint vielversprechend. Zwar existieren auf diesem Gebiet bereits Arbeiten, jedoch handelt es sich um eine recht junge Forschungsrichtung. Hier geben insbesondere die theoretischen Beiträge dieser Arbeit Anlass zur Hoffnung, dass auch im anisotropen Fall ein hohes Potential für interessante Entdeckungen und Erkenntnisse besteht.

Eine Zusammenführung bzw. Kopplung mit einem FEM-Programm durch spezielle Elementtypen, die es erlauben das asymptotische Verhalten an kritischen Stellen mit geringem Aufwand zu erfassen, erscheint ebenfalls denkbar.

Weiterhin wäre die Anwendung von geeigneten Versagensmodellen interessant, insbesondere im Hinblick auf die gefundenen Supersingularitäten. Ein hybrides Verfahren, das spannungsbasierte Festigkeitskriterien mit energiebasierten Bruchkriterien zusammenführt, erscheint hier sinnvoll.

Literaturverzeichnis

- [1] A. Barroso; V. Mantie; F. Paris: Singularity analysis of anisotropic multimaterial corners. *International Journal of Fracture* 119 (2003), S. 1-23
- [2] W. Becker; D. Gross: *Mechanik elastischer Körper und Strukturen*. Berlin: Springer Verlag, (2002)
- [3] D. B. Bogy: Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading. *Journal of Applied Mechanics* 35 (1968), S. 460-466
- [4] D. B. Bogy: On the problem of edge-debonded elastic quarter-planes loaded at the boundary. *International Journal of Solids and Structures* 6 (1970), S. 1287-1313
- [5] D. B. Bogy; K. C. Wang: Stress singularities at interface corners in bonded dissimilar isotropic elastic materials. *International Journal of Solids and Structures* 7 (1971), S. 993-1005
- [6] D. B. Bogy: Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions. *Journal of Applied Mechanics* 38 (1971), S. 377-386
- [7] D. B. Bogy: The plane solution for anisotropic elastic wedges under normal and shear loading. *Journal of Applied Mechanics* 39 (1972), S. 1103-1109
- [8] D. B. Bogy: The order of singularity at a multiwedge corner of a composite plate. *International Journal of Engineering Science* 12 (1974), S. 107-120
- [9] J. H. A. Brahtz: Stress distribution in a reentrant corner. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Applied Mechanics* 55 (1933), S. 31-37
- [10] S. B. Cho; W. C. Carpenter: The complex potential approach to power-logarithmic stress singularities for v-notched cracks in a bi-material. *KSME International Journal* 13 (1999), S. 19-25
- [11] G. Cardano: *Ars magna sive de Regulis Algebraicis*. Nürnberg, 1545
- [12] W. C. Carpenter: Calculation of fracture parameters for a general corner. *International Journal of Fracture* 24 (1984), S. 45-58
- [13] W. C. Carpenter: The eigenvector solution for a general corner or finite opening crack with further studies on the collocation procedure. *International Journal of Fracture* 27 (1985), S. 63-74

- [14] W. C. Carpenter; C. Byers: A path independent integral for computing stress intensities for v-notched cracks in a bimaterial. *International Journal of Fracture* 35 (1987), S. 245-268
- [15] A. Carpinteri: Stress-singularity and generalized fracture toughness at the vertex of re-entrant corners. *Engineering Fracture Mechanics* 26 (1987), S. 143-155
- [16] A. Carpinteri; M. Paggi: Influence of the intermediate material on the singular stress field in trimaterial junctions. *Material Science* 42 No.1 (2006), S. 95-101
- [17] A. Carpinteri; M. Paggi; N. Pugno: Numerical evaluation of generalized stress-intensity factors in multi-layered composites. *International Journal of Solids and Structures* 43 (2006), S. 627-641
- [18] A. Carpinteri; M. Paggi: Analytical study of the singularities arising at multi-material interfaces in 2D linear elastic problems. *Engineering Fracture Mechanics* 74 (2007), S. 59-74
- [19] H.-P. Chen: Stress singularities in anisotropic multi-material wedges and junctions. *International Journal of Solids and Structures* 35 (1998), S. 1057-1073
- [20] D. Chen; H. Nisitani: Singular stress field near the corner of jointed dissimilar materials. *ASME Journal of Applied Mechanics* 60 (1993), S. 607-613
- [21] G. P. Cherapanov: Crack propagation in continuous media. *Journal of Applied Mechanics* 31 (1967), S. 503-512
- [22] T. S. Cook; F. Erdogan: Stresses in bonded materials with a crack perpendicular to the interface. *International Journal of Engineering Science*. 10 (1972), S. 677-697
- [23] J. P. Dempsey; G. B. Sinclair: On the stress singularities in the plane elasticity of the composite wedge. *Journal of Elasticity* 9 (1979), S. 373-391
- [24] J. P. Dempsey; G. B. Sinclair: On the singular behaviour at the vertex of a bi-material wedge. *Journal of Elasticity* 11 (1981), S. 317-327
- [25] J. P. Dempsey: Power-logarithmic stress singularities at bi-material corners and interface cracks. *Journal of Adhesion Science Technology* 9 (1995), S. 253-265
- [26] J. Dundurs: Effect of elastic constants on stress in a composite under plane deformation. *Journal of Composite Materials* 1 (1967), S. 310-322
- [27] J. Dundurs: Discussion: Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading. *Journal of Applied Mechanics* 36 (1969), S. 650-652
- [28] A. H. England: *Complex variable methods in elasticity*. London: Wiley-Interscience, (1971)
- [29] A. H. England: A crack between dissimilar media. *ASME Journal of Applied Mechanics* 32 (1965), S. 400-402
- [30] A. H. England: On stress singularities in linear elasticity. *International Journal of Engineering Science* 9 (1971), S. 571-585

- [31] F. Erdogan: Stress distribution in bonded dissimilar materials with cracks. ASME Journal of Applied Mechanics 32 (1965), S. 403-410
- [32] J. L. Ericksen: Equilibrium of bars. Journal of Elasticity 5 (1975), S. 191-201
- [33] J. L. Ericksen: Introduction to the thermodynamics of solids. New York: Springer-Verlag New York (1991)
- [34] H. Eschenauer; W. Schnell: Elastizitätstheorie I - Grundlagen, Scheiben und Platten. Zürich: Bibliographisches Institut AG, (1981)
- [35] J. D. Eshelby: The continuum theory of lattice defects. Solid State Physics 3 (1965), S. 79-144
- [36] J. D. Eshelby; W. T. Read; W. Shockley: Anisotropic elasticity with applications to dislocation theory. Acta Metallurgica 1 (1953), S. 251-259
- [37] D. N. Fenner: Stress singularities in composite materials with an arbitrarily oriented crack meeting an interface. International Journal of Fracture 12 (1976), S. 705-712
- [38] E. E. Gdoutos; P. S. Theocaris: Stress concentrations at the apex of a plane indenter acting on an elastic half plane. ASME Journal of Applied Mechanics 8 (1975), S. 688-692
- [39] D. E. R. Godfrey: Generalized plane stress in an elastic wedge under isolated loads. The Quarterly Journal of Mechanics & Applied Mathematics 8 (1955), S. 226-236
- [40] D. Gross; Th. Seelig: Bruchmechanik mit einer Einführung in die Mikromechanik. Berlin: Springer Verlag, (2001)
- [41] E. Goursat: Sur l'équation $\Delta\Delta u = 0$. Bulletin de la Societe Mathematique de France 26 (1898), S. 236-237
- [42] A. E. Green; W. Zerna: Theoretical Elasticity. Oxford: Clarendon Press, (1954)
- [43] H. G. Hahn: Bruchmechanik - Einführung in die theoretischen Grundlagen. Stuttgart: Teubner Verlag, (1976)
- [44] V. L. Hein; F. Erdogan: Stress singularities in a two-material wedge. International Journal of Fracture Mechanics 7 (1971), S. 317-330
- [45] J. H. Huth: The complex-variable approach to stress singularities. ASME Journal of Applied Mechanics 20 (1953), S. 561-562
- [46] T. Inoue; H. Koguchi: Influence of the intermediate material on the order of stress singularity in three-phase bonded structure. International Journal of Solids and Structures 33 Nr. 3 (1996), S. 399-417
- [47] T. Inoue; M. Hojo; S. Ochiai: Disappearance conditions of thermal stress singularities based on stress intensity in two and three-phase bonded structures. International Journal of Fracture 96 (1999), S. 197-201
- [48] K. Jänich: Funktionentheorie - Eine Einführung. Berlin: Springer-Verlag, 1995

- [49] P. F. Joseph; N. Zhang: Multiple root solutions, wedge paradoxes and singular stress states that are not variable-separable. *Composites Science and Technology* 58 (1998), S. 1839-1859
- [50] A. I. Kalandia: Stress conditions in plates reinforced by stiffening ribs. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 33 (1969), S. 538-543
- [51] S. N. Karp; F. C. Karal: The elastic-field behaviour in the neighborhood of a crack of arbitrary angle. *Communications On Pure And Applied Mathematics*, Vol. XV (1962), S. 413-421
- [52] M. Knein: Zur Theorie des Druckversuchs. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 6 Nr. 5 (1926), S. 414-416
- [53] H. Koguchi; T. Inoue; T. Yada: Stress singularity in three-phase bonded structure. *ASME Journal of Applied Mechanics*. 63 (1996), S. 252-258
- [54] G. W. Kolosov: Über eine Anwendung der Funktionentheorie mit komplexen Veränderlichen auf ebene Probleme der mathematischen Elastizitätstheorie. Druckerei K. Mattisina, Jurjew, (1909) - In Russisch
- [55] M. C. Kuo; D. B. Bogy: Plane solutions for the displacement and traction-displacement problems for anisotropic elastic wedges. *Journal of Applied Mechanics* 41 (1974), S. 197-202
- [56] D. Leguillon; E. Sanchez-Palencia: Computation of singular solutions in elliptic problems and elasticity. New York: John Wiley & Sons Inc., (1987)
- [57] S. G. Lekhnitskii: *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body*. San Francisco: Holden-Day Inc., (1963)
- [58] S. G. Lekhnitskii: *Anisotropic Plates*. New York: Gordon and Breach, (1968)
- [59] E. Martensen: *Analysis 4 - Funktionentheorie mit Differentialgleichungen im Komplexen*. Mannheim: Bibliographisches Institut, (1972)
- [60] V. V. Meleshko: Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem. *Applied Mechanics Reviews*, 56 (2003), S.33-84
- [61] D. E. Müller: A method for solving algebraic equations using an automatic computer. *Mathematical Tables and Aids to Computation* 10 (1956) S. 208-215
- [62] D. Munz; Y. Y. Yang: Stresses near the edge of bonded dissimilar materials described by two stress intensity factors. *International Journal of Fracture* 60 (1993), S. 169-177
- [63] D. Munz; Y. Y. Yang: Stress singularities at the interface in bonded dissimilar materials under mechanical and thermal loading. *ASME Journal of Applied Mechanics* 59 (1992), S. 857-861
- [64] D. Munz; T. Fett; Y. Y. Yang: The regular stress term in bonded dissimilar materials after a change in temperature. *Engineering Fracture Mechanics* 44 (1993), S. 185-194
- [65] N. I. Muskhelishvili: *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. Noordhoff International Publishers, Leyden, (1975)

- [66] S. S. Pageau; P. F. Joseph; S. B. Biggers: The order of stress singularities for bonded and disbanded three-material junctions. *International Journal of Solids and Structures* 31 No.21 (1994), S. 2979-2997
- [67] S. S. Pageau; P. F. Joseph; S. B. Biggers: Singular antiplane stress fields for bonded and disbanded three-material junctions. *Engineering Fracture Mechanics* 52 (1995), S. 821-832
- [68] M. Paggi; A. Carpinteri: On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion. *Applied Mechanics Reviews* 61 Issue 2 (2008), S. 1-22
- [69] P. J. Papadakis; I. Babuska: A numerical procedure for the determination of certain quantities related to stress intensity factors in two-dimensional elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering* 122 (1995), S. 69-92
- [70] Z. Q. Qian; A. R. Akisanya: An investigation of the stress singularity near the free edge of scarf joints. *European Journal of Mechanics A/Solids* 18 (1999), S. 443-463
- [71] J. E. Reedy: Asymptotic interface solutions for butt tensile joints. *International Journal of Solids and Structures*, 30 (1993), S. 767-777
- [72] J. E. Reedy; T. R. Guess: Comparison of butt tensile strength data with interface corner stress intensity factor prediction. *International Journal of Solids and Structures* 30 (1993), S. 2929-2936
- [73] J. R. Rice: A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics* 35 (1968), S. 379-386.
- [74] J. R. Rice; G. C. Sih: Plane problems of cracks in dissimilar media. *Journal of Applied Mechanics ASME* 35 (1965), S. 418-423.
- [75] M. Sadd: *Elasticity - Theory, Applications and Numerics*. Amsterdam: Elsevier, 2005
- [76] G. C. Sih, P. C. Paris; G. R. Irwin: On cracks in rectilinearly anisotropic bodies. *International Journal of Fracture* 1 No.3 (1965), S. 189-203
- [77] G. B. Sinclair: Stress singularities in classical elasticity-I: Removal, Interpretation, and Analysis. *Applied Mechanics Reviews* 57 (2004), S. 251-297
- [78] G. B. Sinclair: Stress singularities in classical elasticity-II: Asymptotic Identification. *Applied Mechanics Reviews* 57 (2004), S. 385-439
- [79] A. N. Stroh: Steady state problems in anisotropic elasticity. *Journal of Mathematical Physics* 41 (1962), S. 77-103
- [80] T. Suga; G. Elssner; S. Schmauder: Composite parameters and mechanical compatibility of material joints. *Journal of Composite Materials* 22 (1988), S. 917-934
- [81] T. Suga; K. Mizuno; K. Miyazawa: Thermal stresses in ceramic-to-metal-joints. *Proceedings of the MRS International Meeting on Advanced Materials*, Bd. 8 Materials Research Society (1989), S. 137-142

- [82] P. S. Theocaris: The order of singularity at a multi-wedge-corner of a composite plate. *International Journal of Engineering Science* 12 (1974), S. 107-120
- [83] C. J. Tranter: The use of the mellin transform in finding the stress distribution in an infinite wedge. *The Quarterly Journal of Mechanics & Applied Mathematics* 1 (1948), S. 125-130
- [84] W. C. Wang; J. T. Chen: Theoretical and experimental re-examination of a crack perpendicular to and terminating at the bimaterial interface. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design* 28 (1993), S. 53-61
- [85] K. Wieghardt: Über das Zerreißen elastischer Körper. *Zeitschrift für Mathematik und Physik: Organ für angewandte Mathematik* 55 (1907), S. 60-103
- [86] H. M. Wigger: Spannungskonzentrations-Effekte an Verstärkungspflaster-Ecken. *Forschungsbericht - Band 18* (ISBN 978-3-935868-18-1), TU Darmstadt, Dissertation (2008)
- [87] M. L. Williams: Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. *Journal of Applied Mechanics* 19 (1952), S. 526-528
- [88] M. L. Williams: The complex-variable approach to stress singularities - II. *ASME J. Appl. Mech.* 23 (1956), S. 477-478
- [89] Y. Y. Yang: The type of $r^\omega \ln(r)$ stress singularities in a two-dissimilar-materials joint under thermal loading. *Journal of Thermal Stresses* 22 No. 1 (1999), S. 101-121
- [90] Y. Y. Yang: Effect of the regular term on the stress field in a joint of dissimilar materials under remote mechanical load. *Archive of Applied Mechanics* 69 (1999), S. 364-378
- [91] Y. Y. Yang; D. Munz: Determination of the regular stress term in a dissimilar materials joint under thermal loading by the mellin transform, *Journal of Thermal Stresses* 17 No. 3 (1994), S. 321-336
- [92] Y. Y. Yang; D. Munz: Stress distribution in a dissimilar materials joint for complex singular eigenvalues under thermal loading, *Journal of Thermal Stresses* 18 No. 4 (1995), S. 407-419
- [93] A. R. Zak; M. L. Williams: Crack point stress singularities at a bi-material interface. *ASME Journal of Applied Mechanics* 30 (1963), S. 142-143
- [94] R. I. Zwiers; T. C. T. Ting; R. L. Spilker: On the logarithmic singularity of free-edge stress in laminated composites under uniform extension. *Journal of Applied Mechanics* 49 (1982), S. 561-569

Bisher sind in dieser Reihe erschienen

Band 1

Zur mikrorissinduzierten Schädigung spröder Materialien

B. Lauterbach, Dissertation 2001, ISBN 3-935868-01-4

Band 2

3D-Simulation der Mikrostrukturentwicklung in Zwei-Phasen-Materialien

R. Müller, Dissertation 2001, ISBN 3-935868-02-2

Band 3

Zur numerischen Simulation von Morphologieänderungen in mikroheterogenen Materialien

S. Kolling, Dissertation 2001, ISBN 3-935868-03-0

Band 4

Theoretische und numerische Untersuchung von Versagensmechanismen in Metall-Keramik-Verbundwerkstoffen

T. Emmel, Dissertation 2002, ISBN 3-935868-04-9

Band 5

On microcrack dominated problems in dynamics and statics of brittle fracture: a numerical study by boundary element techniques

S. Rafiee, Dissertation 2002, ISBN 3-935868-05-7

Band 6

Kontinuumsmechanik anisotroper Festkörper und Fluide

H. Ehrentraut, Habilitationsschrift 2002, ISBN 3-935868-06-5

Band 7

Plane unsteady inviscid incompressible hydrodynamics of a thin elastic profile

N. Blinkova, Dissertation 2002, ISBN 3-935868-07-3

Band 8

Anmerkungen zur Simulation von entfestigendem Materialverhalten

H. Baaser, Habilitationsschrift 2004, ISBN 3-935868-08-1

Band 9

Orts- und zeitadaptive DAE-Methoden zur Beschreibung elastisch-plastischen Materialverhaltens innerhalb der FEM

S. Eckert, Dissertation 2005, ISBN 3-935868-09-X

Band 10

Simulations of the Flow of the Ross Ice Shelf, Antarctica: Parameter Sensitivity Tests and Temperature-Dependent Rate Factor

A. Humbert, Dissertation 2005, ISBN 3-935868-10-3

Band 11

A Thermo-mechanical Continuum Theory with Internal Length of Cohesionless Granular Materials

Chung Fang, Dissertation 2006, ISBN 3-935868-11-1

Band 12

Modeling Dry Granular Avalanches past Different Obstructions: Numerical Simulation and Laboratory Analyses

Chiou Min-Ching, Dissertation 2006, ISBN 3-935868-12-X

Band 13

Configurational forces in defect mechanics and in computational methods

R. Müller, Habilitationsschrift 2005, ISBN 3-935868-13-8

Band 14

Hyperelastic dynamics in physical and material space

S. Kolling, Habilitationsschrift 2007, ISBN 978-3-935868-14-3

Band 15

Phenomenological modeling of ferroelectric material behavior

V. Mehling, Dissertation 2007, ISBN 978-3-935868-15-0

Band 16 Ein mischungs-basiertes Materialmodell zum Knochenumbau

R.-R. Kühn, Dissertation 2006, ISBN 978-3-935868-16-7

Band 17

Einige Erweiterungen der Rand-Finite-Elemente-Methode und deren Anwendung auf Rande-ffekte in ebenen Laminaten

J. Artel, Dissertation 2007, ISBN 978-3-935868-17-4

Band 18

Spannungskonzentrations-Effekte an Verstärkungspflaster-Ecken

H. Wigger, Dissertation 2008, ISBN 978-3-935868-18-1

Band 19

Rotationseffekte in der Kristallplastizität

C. Bröse, Dissertation 2007, ISBN 978-3-935868-19-8

Band 20

Finite-Element-Modelle zur Simulation von Delaminationen dünner Filme auf Substraten

V. D. Pham, Dissertation 2010, ISBN 978-3-935868-20-4